

I. PHYSIQUE DES FLUIDES

Physique Générale III-IV, L. Villard, CRPP-EPFL.

Version 2005-2006

Table des matières

| | | |
|----------|--------------------------------------------------------------------|-----------|
| 1 | Le modèle fluide | 3 |
| 1.1 | Généralités : qu'est-ce qu'un fluide? | 3 |
| 1.2 | Du monde des particules au monde fluide | 3 |
| 2 | Cinématique des fluides | 7 |
| 2.1 | Dérivées partielles et dérivée totale | 8 |
| 2.2 | Descriptions Eulérienne et Lagrangienne | 13 |
| 2.3 | La pression et son gradient | 13 |
| 2.4 | Equilibre statique | 16 |
| 2.5 | Conservation de la masse : équation de continuité | 17 |
| 2.6 | Rotationnel du champ de vitesses : le vecteur tourbillon | 19 |
| 2.7 | Types de mouvements fluides (écoulements) | 21 |
| 3 | Dynamique des fluides parfaits | 22 |
| 3.1 | Hypothèses et équations de base du modèle fluide parfait | 22 |
| 3.2 | Equation de Bernouilli | 24 |
| 3.3 | D'Euler à Bernouilli | 27 |
| 3.4 | Applications de Bernouilli | 28 |

| | | |
|----------|--------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 4 | Dynamique des fluides visqueux | 32 |
| 4.1 | Viscosité | 33 |
| 4.2 | Equations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible | 36 |
| 5 | Similarité et nombre de Reynolds | 41 |
| 5.1 | Introduction | 41 |
| 5.2 | Equations normalisées et nombre de Reynolds | 41 |
| 5.3 | Ecoulements similaires. Essais en tunnel aéro-/hydro-dynamique | 43 |

1 Le modèle fluide

1.1 Généralités : qu'est-ce qu'un fluide ?

On appelle “fluide” un corps à l'état liquide, gaz ou plasma. Il s'agit de systèmes matériels constitués d'un grand nombre de molécules ou particules dans lesquels, contrairement à l'état solide, n'existe pas d'arrangement ordonné à longue distance. La différence entre gaz et liquide est plus subtile. Dans un gaz, les molécules sont en moyenne plus éloignées les unes des autres que leur taille moyenne. Elles subissent de temps en temps des collisions, mais la plupart du temps n'interagissent pas. Alors que dans un liquide, les molécules sont à des distances pratiquement égales à leur taille, et donc sont en interaction permanente avec leur plus proches voisines. En conséquence, un liquide est généralement beaucoup moins compressible qu'un gaz. Dans un plasma (appelé parfois “gaz ionisé”), les particules sont chargées électriquement (positivement ou négativement), bien que le système soit globalement neutre. Les particules dans un plasma interagissent via les forces électromagnétiques, qui sont à longue portée ; les particules d'un plasma sont en moyenne beaucoup plus éloignées les unes des autres que leur taille, et donc entrent rarement en collision, mais interagissent en permanence avec les autres. Dans ce cours, nous n'étudierons pas le plasma (bien que 99% de la matière de l'univers soit à l'état de plasma...).

Contrairement aux systèmes thermodynamiques étudiés en première année où on parlait de *la* densité, *la* pression, etc. du système, nous allons nous intéresser aux cas inhomogènes et non constants : la densité, la pression, la vitesse, etc., non seulement ne sont pas les mêmes selon l'endroit [p.ex. la pression atmosphérique n'est pas la même ici qu'au sommet du Mont Blanc], mais ne sont pas les mêmes à un endroit donné et à des temps différents [p.ex. la pression atmosphérique ici et maintenant n'est plus ce qu'elle était ici hier]. En termes techniques, les quantités caractérisant l'état du système sont **fonctions de l'espace et du temps**. Mathématiquement, ces objets sont appelés **champs** (scalaires ou vectoriels). La physique des fluides utilise directement les outils développés dans les cours d'Analyse, qu'elle permet d'illustrer et de visualiser.

1.2 Du monde des particules au monde fluide

Décrire un système constitué de l'ordre de $N \sim 10^{23}$ particules en tenant compte de leurs interactions n'est pas une chose facile.

Dans l'approche mécanique, on décrit le système par un ensemble de points matériels de masse m_α , situés aux positions $\vec{x}_\alpha(t)$. Il faut donc spécifier $3N$ fonctions d'une variable.

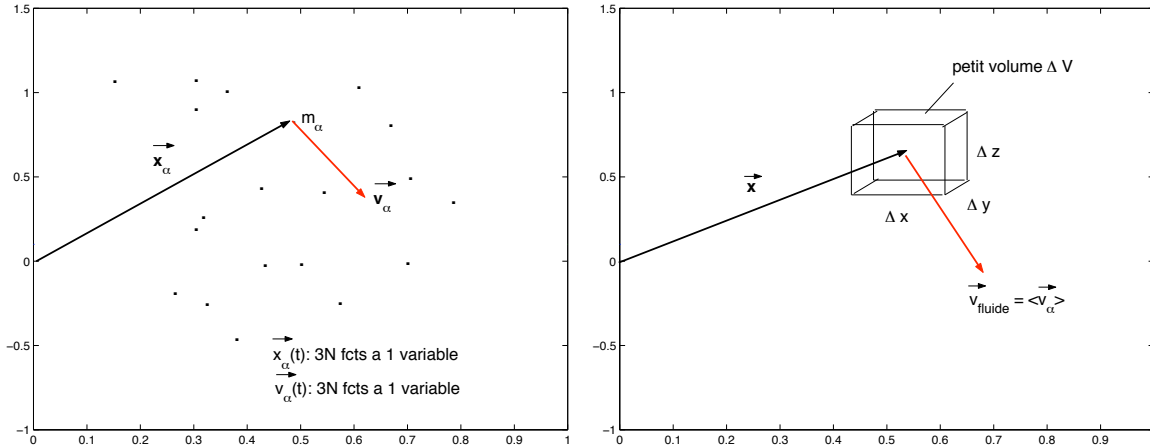


FIG. 1 – Du monde des particules (à gauche) au monde fluide (à droite).

On trouve ces fonctions en résolvant les équations de Newton

$$m_\alpha \frac{d^2 \vec{x}_\alpha}{dt^2} = \sum_{\beta=1, \beta \neq \alpha}^N \vec{F}_{\beta\alpha}^{\text{int}} + \vec{F}_\alpha^{\text{ext}}, \quad \alpha = 1..N, \quad (1)$$

soit un système de $3N$ équations différentielles ordinaires couplées du 2e ordre. En fait, dès que $N \geq 3$, il n'y a pas de solution analytique et il faut recourir à la simulation numérique. Cependant, même avec les ordinateurs les plus puissants aujourd'hui, il est pratiquement impossible de résoudre ces équations pour $N \sim 10^{23}$.

Dans l'approche dite *cinétique*, on décrit le système par une *fonction de distribution* $f(\vec{x}, \vec{v}, t)$ qui représente la *densité de probabilité* de trouver une particule en \vec{x} à la vitesse \vec{v} au temps t . A partir des lois de la mécanique et de considérations statistiques, on peut dériver une équation pour l'évolution de f . Cette équation est une équation aux dérivées partielles, généralement non linéaire, pour une fonction de 7 variables.

Dans l'approche fluide, on va considérer des *moyennes* locales de f . Autrement dit, en chaque point \vec{x} de l'espace, et à chaque instant t , on définit des quantités moyennes sur les particules se trouvant au voisinage de \vec{x} et dans un intervalle de temps autour de t .

On peut visualiser ceci en imaginant qu'on découpe l'espace en petits éléments de volume $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$. On définira par exemple la vitesse moyenne sur les particules se trouvant à l'intérieur de ΔV

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{1}{N_{\in \Delta V}} \sum_{\alpha \in \Delta V} \vec{v}_\alpha. \quad (2)$$

De même, on définit la densité $[kg/m^3]$ comme

$$\langle \rho \rangle = \frac{\sum_{\alpha \in \Delta V} m_\alpha}{\Delta V}. \quad (3)$$

Le **modèle fluide** s'obtient en faisant mathématiquement la limite pour $\Delta V \rightarrow 0$. La

vitesse fluide est ainsi

$$\vec{v}_{\text{fluide}} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \langle \vec{v} \rangle \quad (4)$$

et la **densité du fluide** est

$$\rho_{\text{fluide}} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \langle \rho \rangle . \quad (5)$$

Il est crucial de comprendre la différence entre vitesse fluide \vec{v}_{fluide} et la vitesse des particules \vec{v}_α . Si on prend comme système l'atmosphère, \vec{v}_{fluide} représente la **vitesse du vent**, alors que les molécules d'oxygène et d'azote ont une vitesse moyenne de l'ordre de 400 à 500 m/s, (même s'il n'y a pas de vent!).

On peut visualiser ceci en regardant un promeneur au bord du lac. Il est entouré d'un nuage de moucherons qui volent de façon apparemment désordonnée, dans tous les sens, en moyenne à 20 km/h. Alors que le promeneur marche à 3 km/h, le nuage de moucherons le suit. Au sens des définitions ci-dessus, la vitesse fluide du système "nuage de moucherons" est égale à la vitesse du promeneur. Qui est bien différente de la vitesse des moucherons.

On définit ainsi la **particule fluide** : c'est une particule virtuelle, censée représenter les particules réelles au voisinage de la position \vec{x} et du temps t pour certaines quantités moyennées comme ci-dessus, qui sont les "attributs" de la particule fluide.

Les quantités \vec{v}_{fluide} , ρ_{fluide} , etc, dépendent de la position et du temps. Ce sont des fonctions de \vec{x} et t . Ainsi, le modèle fluide décrit le système comme un ensemble de fonctions de 4 variables (l'espace et le temps). [Dans ce qui suit, on omettra l'indice "fluide"]. On définit donc la densité

$$\rho(\vec{x}, t) = \rho(x, y, z, t) , \quad (6)$$

la pression

$$P(\vec{x}, t) = P(x, y, z, t) , \quad (7)$$

la température

$$T(\vec{x}, t) = T(x, y, z, t) \quad (8)$$

et la vitesse

$$\vec{v}(\vec{x}, t) = v_x(x, y, z, t)\vec{e}_x + v_y(x, y, z, t)\vec{e}_y + v_z(x, y, z, t)\vec{e}_z , \quad (9)$$

où $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ est le repère orthonormé des coordonnées cartésiennes. [N.B. On peut en principe généraliser à des coordonnées cylindriques, sphériques, etc.] Les objets ρ, P, T sont des *champs scalaires* (fonctions de 4 variables) alors que \vec{v} est un *champ vectoriel* (un ensemble de 3 fonctions de 4 variables). La figure 2 donne une illustration de champ scalaire, la figure 3 de champ vectoriel.

La description fluide du système est une grande simplification de la réalité. Un certain nombre de phénomènes ne pourront pas être décrits par le modèle fluide. L'observation de la variété et la diversité des mouvements fluides possibles (**voir expériences de démonstration du cours**) donne cependant une idée de la complexité de tels systèmes.

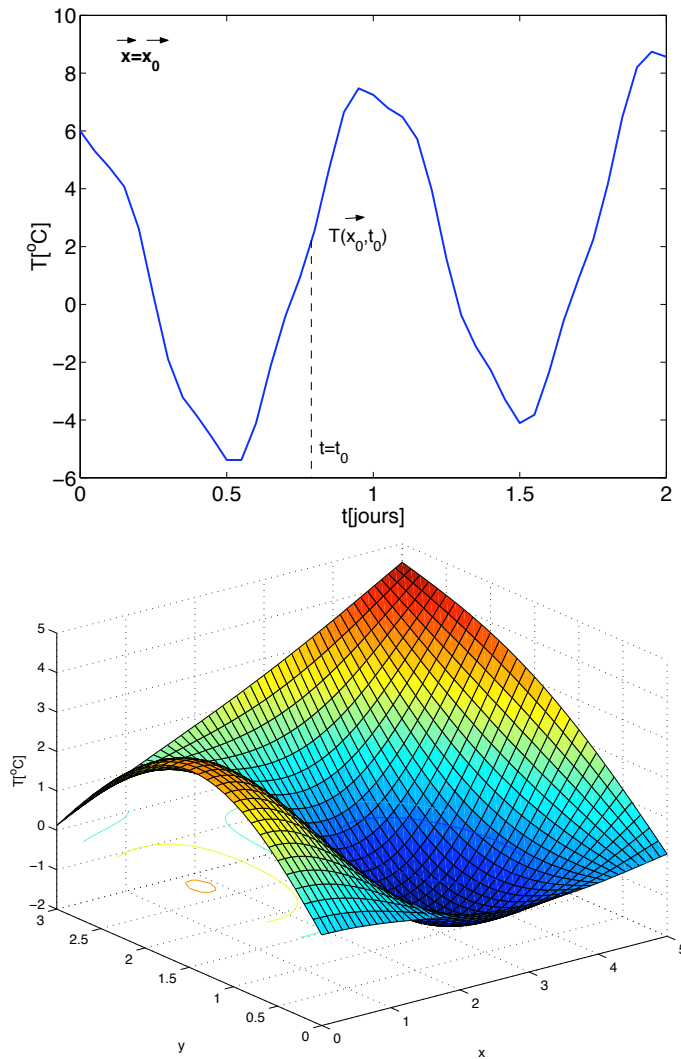


FIG. 2 – Exemple de champ scalaire : la température. T varie au cours du temps à un endroit donné fixe (en haut). T varie selon la position à un instant donné (en bas).

Le but de ce qui suit est d’obtenir les **équations du mouvement des particules fluides**, c’est-à-dire un système d’équations (différentielles, aux dérivées partielles) reliant entre eux les divers champs, scalaires et vectoriels, associés (“attributs”) des particules fluides.

Il est remarquable qu’un ensemble somme toute restreint d’équations puisse rendre compte d’une telle richesse de phénomènes.

Expériences du cours

1. Écoulement laminaire ou turbulent. Laminaire : v faible; mouvement régulier, prédictible; glissement de “feuilles de courant”; structure conservée. Turbulent : v élevée; mouvement irrégulier, imprédictible, chaotique; condition initiales voisines \rightarrow divergence des trajectoires; structure détruite.
2. Écoulement entre 2 cylindres. $\omega < \omega_{crit} \Rightarrow$ écoulement stationnaire, laminaire,

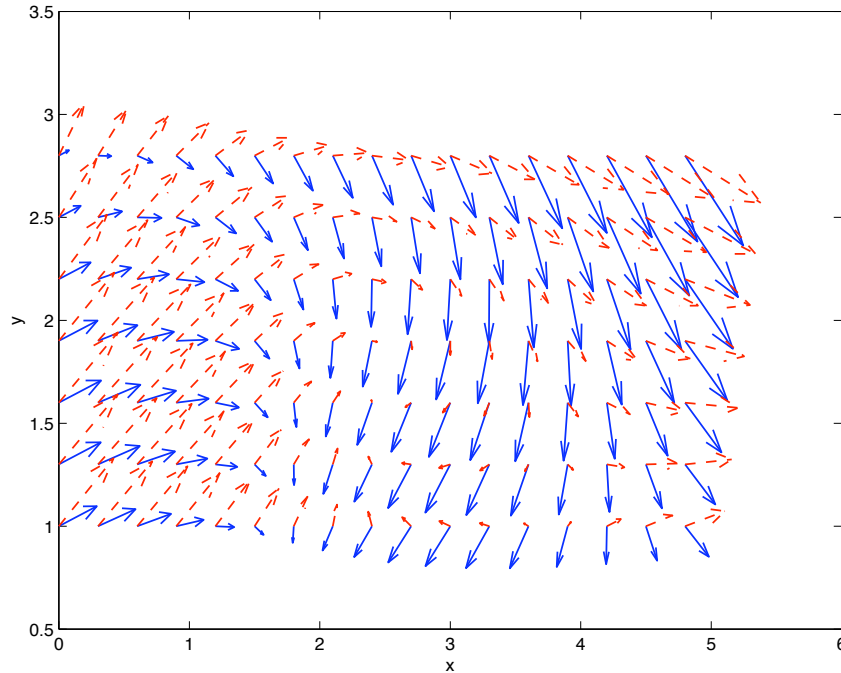


FIG. 3 – Exemple de champ vectoriel : vitesse du vent mesurée à deux instants différents $t = t_1$ (trait plein) et $t = t_2$ (traitillés)

$\vec{v} = v_\theta(r)\vec{e}_\theta$, $\partial\vec{v}/\partial t = 0$. $\omega > \omega_{crit} \Rightarrow$ écoulement non stationnaire, $\vec{v} = \vec{v}(\vec{x}, t)$, $\partial\vec{v}/\partial t \neq 0$, même si $\omega = \text{const}$, turbulent, avec une certaine structure.

3. Analogie mécanique : pendule articulé.
4. Propagation de tourbillons. Un tourbillon peut garder sa structure en se déplaçant. Il perd sa structure lorsqu'il rencontre un obstacle. Ex. : cyclones.
5. Balles de ping-pong dans un écoulement. Effet du mouvement du fluide sur le mouvement de corps solides.
6. Cylindre en sagex. Viscosité + rotation \Rightarrow portance. Effet Magnus.

2 Cinématique des fluides

Objectifs : Comprendre et savoir utiliser la représentation mathématique de la description du mouvement d'un fluide. Comprendre les variations dans l'espace et le temps : se familiariser avec les notions de dérivés spatiales et temporelles. Comprendre et savoir utiliser le concept de dérivée totale, ou le long de la trajectoire, et en particulier bien saisir la différence avec la dérivée partielle.

2.1 Dérivées partielles et dérivée totale

Rappel. Notations.

Soit un champ scalaire $f = f(\vec{x}, t) = f(x, y, z, t)$ et un champ vectoriel $\vec{v}(\vec{x}, t) = \vec{v}(x, y, z, t) = v_x(x, y, z, t)\vec{e}_x + v_y(x, y, z, t)\vec{e}_y + v_z(x, y, z, t)\vec{e}_z$. La dérivée partielle de f par rapport à x s'obtient en considérant les variables y, z, t constantes :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z, t) - f(x, y, z, t)}{\Delta x}. \quad (10)$$

Et de même pour les autres dérivées par rapport à y, z et t , respectivement.

Pour un champ vectoriel, on dérive (en composantes cartésiennes!) chaque composante séparément ; par exemple :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} &= \frac{\partial v_x}{\partial t} \vec{e}_x + \frac{\partial v_y}{\partial t} \vec{e}_y + \frac{\partial v_z}{\partial t} \vec{e}_z \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_x(x, y, z, t + \Delta t) - v_x(x, y, z, t)}{\Delta t} \vec{e}_x \\ &+ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_y(x, y, z, t + \Delta t) - v_y(x, y, z, t)}{\Delta t} \vec{e}_y \\ &+ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_z(x, y, z, t + \Delta t) - v_z(x, y, z, t)}{\Delta t} \vec{e}_z. \end{aligned} \quad (11)$$

Pour les dérivées des coordonnées spatiales, on utilise souvent la notation de l'opérateur **nabla**, noté ∇ :

$$\nabla = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}. \quad (12)$$

Ainsi, le **gradient** d'un champ scalaire P est, en coordonnées cartésiennes :

$$\nabla P = \vec{e}_x \frac{\partial P}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial P}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial P}{\partial z}. \quad (13)$$

La **divergence** d'un champ vectoriel \vec{v} est, en coordonnées cartésiennes :

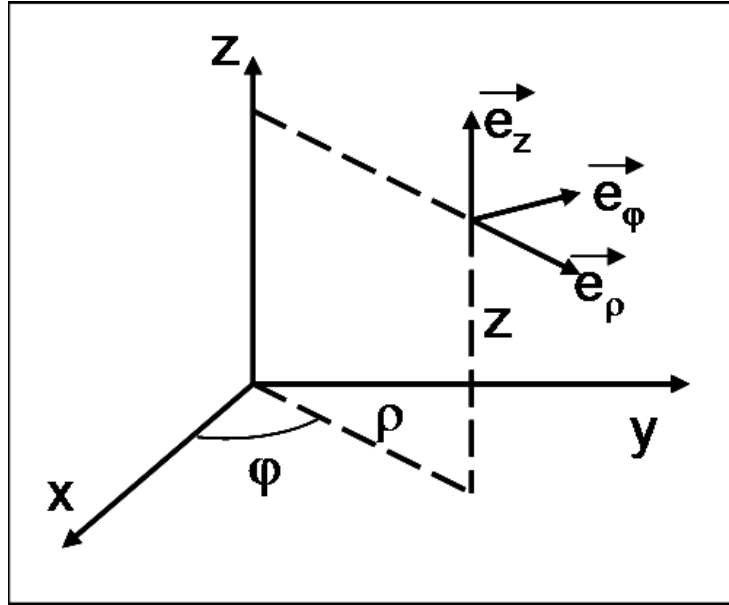
$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}. \quad (14)$$

Le **rotationnel** d'un champ vectoriel \vec{v} est, en coordonnées cartésiennes :

$$\nabla \times \vec{v} = \vec{e}_x \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) + \vec{e}_y \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) + \vec{e}_z \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right). \quad (15)$$

Le **Laplacien** d'un champ scalaire P est, en coordonnées cartésiennes :

$$\nabla^2 P = \nabla \cdot \nabla P = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2}. \quad (16)$$

FIG. 4 – Coordonnées cylindriques (ρ, φ, z)

Opérateur ∇ en coordonnées généralisées

Soit (q_1, q_2, q_3) des coordonnées généralisées, données par des fonctions des coordonnées cartésiennes :

$$q_1 = q_1(x, y, z), \quad q_2 = q_2(x, y, z), \quad q_3 = q_3(x, y, z). \quad (17)$$

L'opérateur "nabla" (∇) s'écrit alors :

$$\nabla = \nabla q_1 \frac{\partial}{\partial q_1} + \nabla q_2 \frac{\partial}{\partial q_2} + \nabla q_3 \frac{\partial}{\partial q_3}. \quad (18)$$

P.ex. dans le cas des coordonnées cylindriques (Fig.4), on a :

$$q_1 = \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad q_2 = \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right), \quad q_3 = z. \quad (19)$$

On a alors

$$\nabla q_1 = \nabla \rho = \vec{e}_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial \rho}{\partial z}. \quad (20)$$

On trouve après calcul (exercice) :

$$\nabla \rho = \vec{e}_\rho, \quad \nabla \varphi = \frac{1}{\rho} \vec{e}_\varphi, \quad \nabla z = \vec{e}_z. \quad (21)$$

Le gradient d'un champ scalaire de pression $P(\rho, \varphi, z)$ en coordonnées cylindriques s'écrit

$$\nabla P = \vec{e}_\rho \frac{\partial P}{\partial \rho} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \varphi} + \vec{e}_z \frac{\partial P}{\partial z}. \quad (22)$$

On peut obtenir les expressions des opérateurs divergence, rotationnel et laplacien avec la même démarche. Pour plus de détails, voir les cours d'analyse.

Illustration

Soit $P(x, y, z, t)$ le champ de la pression atmosphérique. Soit x la direction de l'est, y la direction du nord, z la direction verticale.

$\frac{\partial P}{\partial x}$ est la variation de la pression, par unité de longueur, à une latitude donnée (y), à une altitude donnée (z), à un instant donné (t), lorsqu'on va en direction de l'est (x).

$\frac{\partial P}{\partial y}$ est la variation de pression, par unité de longueur, à une longitude donnée (x), à une altitude donnée (z), à un instant donné (t), lorsqu'on va en direction du nord (y).

$\frac{\partial P}{\partial z}$ est la variation de pression, par unité de longueur, à une longitude donnée (x), à une latitude donnée (y), à un instant donné (t), lorsqu'on va en direction verticale vers le haut (z).

$\frac{\partial P}{\partial t}$ est variation de pression, par unité de temps, (donc la vitesse de variation de la pression), **à un endroit donné fixe** (x, y, z).

Pour un champ vectoriel, par exemple soit $\vec{v}(x, y, z, t)$ le champ de vitesses du vent, on a

$\frac{\partial \vec{v}}{\partial y}$ est la variation de la vitesse du vent (intensité et direction!), à une longitude donnée (x), à une altitude donnée (z), à un instant donné (t), lorsqu'on va en direction du nord (y).

Et de façon similaire pour les autres dérivées partielles.

ATTENTION

$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ est la vitesse de variation de la vitesse du vent (intensité et direction), **à un endroit donné fixe** (x, y, z). On serait tenté, en utilisant la définition de l'accélération de la cinématique du point matériel, d'identifier ceci avec l'accélération de l'air. **Mais ceci n'est PAS l'accélération.**

Un exemple : observons, à une entrée d'autoroute, le flux de véhicules. Admettons qu'il s'agisse de conducteurs bien disciplinés qui conduisent tous en respectant la vitesse limite 60km/h à l'endroit où la route normale se termine et où l'autoroute commence. La mesure de la vitesse des véhicules donnera, *à cet endroit fixe*, le résultat $v=60\text{km/h}$ en tous temps, donc une constante au cours du temps, c'est-à-dire

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 0 .$$

Or, chacun des véhicules est en train d'accélérer à cet endroit. Donc $\vec{a} \neq 0$ et par

conséquent

$$\boxed{\vec{a} \neq \frac{\partial v}{\partial t}}. \quad (23)$$

Pour obtenir l'expression mathématique correcte de l'accélération du flux de véhicules, il faut introduire la notion de dérivée totale, ou *dérivée le long de la trajectoire*.

Dérivée totale, dérivée le long de la trajectoire.

Soit un fluide, décrit par un champ de vitesse $\vec{v}(\vec{x}, t)$, un champ de pression $P(\vec{x}, t)$. Soit (x_1, x_2, x_3) des coordonnées cartésiennes.

Soit une particule fluide. Soit $\vec{X}(t) = X_1(t)\vec{e}_1 + X_2(t)\vec{e}_2 + X_3(t)\vec{e}_3$ son équation horaire. On a la vitesse de la particule :

$$\frac{d\vec{X}(t)}{dt} = \vec{v}(\vec{X}(t), t). \quad (24)$$

Soit $\hat{P}(t)$ la pression à l'endroit de la particule fluide :

$$\hat{P}(t) = P(\vec{X}(t), t). \quad (25)$$

Il s'agit de la pression telle que mesurerait un baromètre *qui suivrait la particule*. La vitesse de variation de cette pression \hat{P} est

$$\frac{d\hat{P}}{dt} = \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{dX_1}{dt} \frac{\partial P}{\partial x_1} + \frac{dX_2}{dt} \frac{\partial P}{\partial x_2} + \frac{dX_3}{dt} \frac{\partial P}{\partial x_3}. \quad (26)$$

Avec l'Eq.(24), on a

$$\boxed{\frac{d\hat{P}}{dt} = \frac{\partial P}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial P}{\partial x_i}} \quad (27)$$

En utilisant la notation de l'opérateur nabla, Eq.(12) :

$$\boxed{\frac{d\hat{P}}{dt} = \frac{\partial P}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)P} \quad (28)$$

L'Eq.(28) est l'expression de la **dérivée totale**, ou **dérivée le long de la trajectoire** de la pression.

Pour un champ vectoriel, par exemple le champ de vitesses $\vec{v}(\vec{x}, t)$, on a

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_i} \quad (29)$$

Avec la notation de l'opérateur nabla, Eq.(12),

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} \quad (30)$$

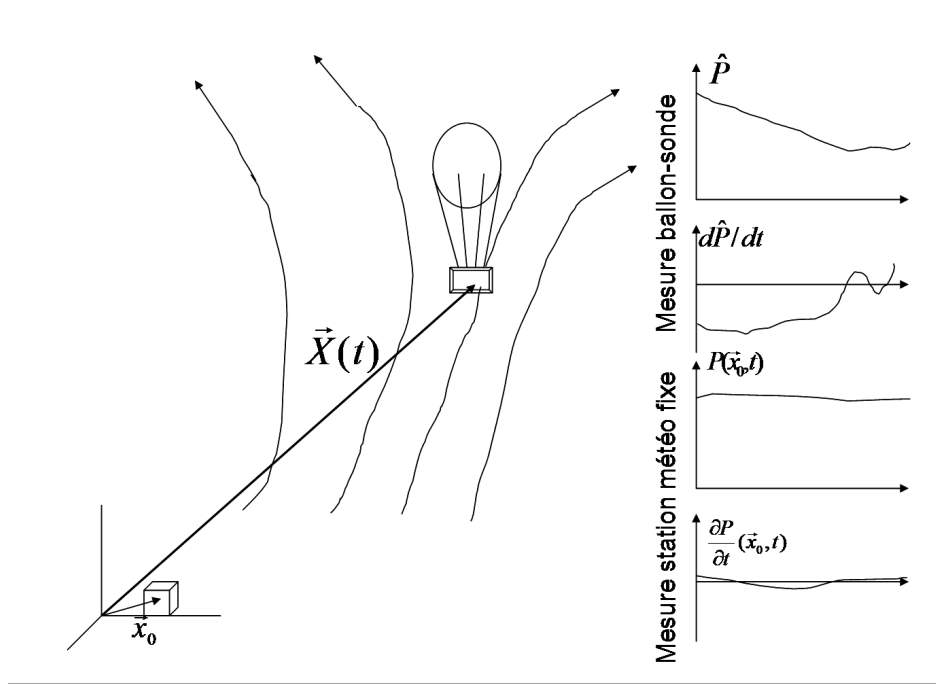


FIG. 5 – Pression mesurée par une station météo fixe, $P(\vec{x} = \vec{x}_0, t)$, pression mesurée par un ballon-sonde emporté par le vent, $\hat{P}(t) = P(\vec{x} = \vec{X}(t), t)$, et leurs variations temporelles respectives, $\frac{\partial P}{\partial t} \neq \frac{d\hat{P}}{dt}$.

(Mathématiquement parlant, il s'agit de généralisations de la règle de dérivation des fonctions composées).

Ainsi, dans l'exemple de l'atmosphère, $\frac{d\hat{P}}{dt}$ est la vitesse de variation de la pression atmosphérique mesurée par un baromètre emporté par un ballon sonde qui suivrait le mouvement des masses d'air, alors que $\frac{\partial P}{\partial t}$ est la vitesse de variation de la pression atmosphérique mesurée par un baromètre placé dans une station météo fixe (Figure 5).

La signification de $d\vec{v}/dt$ est la vitesse de variation de la vitesse du fluide, mesurée lorsqu'on se déplace avec la particule fluide, autrement dit c'est l'accélération de la particule fluide. Dans l'exemple du trafic routier, c'est la vitesse de variation de la vitesse du flot de véhicules lorsqu'on se déplace avec les véhicules, autrement dit c'est l'accélération du véhicule. On a donc l'expression de l'accélération d'une particule fluide :

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}}. \quad (31)$$

De façon générale :

$$\boxed{\frac{d}{dt} \neq \frac{\partial}{\partial t}}. \quad (32)$$

2.2 Descriptions Eulérienne et Lagrangienne

On a deux façons différentes de caractériser (décrire) le mouvement d'un fluide. Dans la description Eulérienne, on mesure au cours du temps les quantités pression, densité, vitesse, etc, en des endroits fixes de l'espace. Dans les illustrations de la Section précédente, dans le cas de l'atmosphère, cela revient à mesurer la pression, la vitesse du vent, la température, etc, sur un ensemble de stations météo fixes. Dans l'exemple du "flot" de véhicules, cela revient à placer des radars fixes tout au long de la route pour mesurer les vitesses des véhicules.

Dans la description Lagrangienne, on mesure les quantités pression, densité, vitesse, etc, en des endroits qui se déplacent avec le fluide. Dans les illustrations de la Section précédente, dans le cas de l'atmosphère, cela revient à mesurer la pression, la vitesse du vent, la température, etc, par un ensemble de ballons-sonde dérivant avec le vent. Dans l'exemple du "flot" de véhicules, cela revient à placer un compteur de vitesse dans chaque voiture.

Mathématiquement, cela revient à utiliser des fonctions différentes, qui ont notamment des variations temporelles différentes. Voir la Section précédente. Ces deux approches correspondent aussi à deux classes de méthodes de résolution numérique des équations.

2.3 La pression et son gradient

Rappel. La pression est une force par unité de surface (unités Pascal = $Pa = N/m^2$) exercée par un fluide sur une paroi. Cette force est perpendiculaire à la paroi. On généralise pour définir une pression locale : soit un élément de surface $d\vec{\sigma}$. La force de pression sur l'élément de surface est

$$\boxed{\vec{F} = -P d\vec{\sigma}}. \quad (33)$$

où on a défini le vecteur élément de surface $d\vec{\sigma}$ normal à la surface, orienté **vers** le fluide exerçant la pression.

On généralise cette notion pour définir une pression en tout point du fluide. On supposera que cette force de pression s'exerce de la même façon dans toutes les directions de l'espace ; on parle de pression **isotrope**. C'est le cas de nombreux systèmes physiques. Voir expérience du cours "transmission de la pression".

On représente souvent les champs scalaires par des lignes (surfaces) de niveau. Pour la pression, ces lignes sont appelées **isobares**. Elles sont couramment utilisées dans les cartes météo. Voir figure 6.

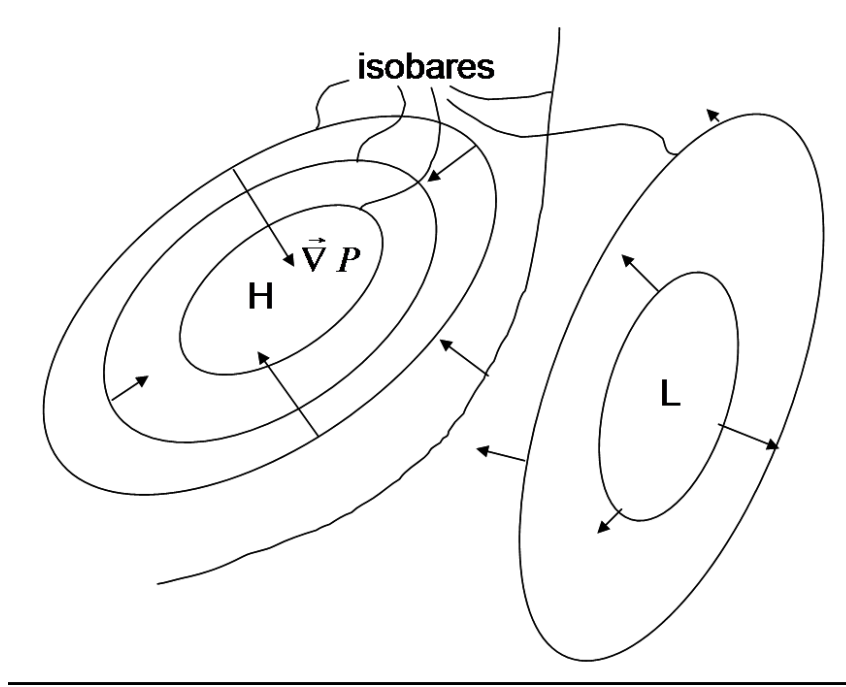


FIG. 6 – *Pression dans un fluide. Isobares : lignes (surfaces) $P = \text{const.}$*

Propriété 1 : le gradient de pression est en tout point perpendiculaire aux isobares

C'est en fait une propriété générale de tout champ scalaire. Le gradient est une quantité vectorielle dont la norme indique la variation spatiale maximum, et la direction est celle de la variation la plus forte (“pente la plus raide, vers le haut”), voir Figure 6.

Propriété 2 : la résultante des forces de pression, par unité de volume, subie par une particule fluide est

$$\boxed{-\nabla P} . \quad (34)$$

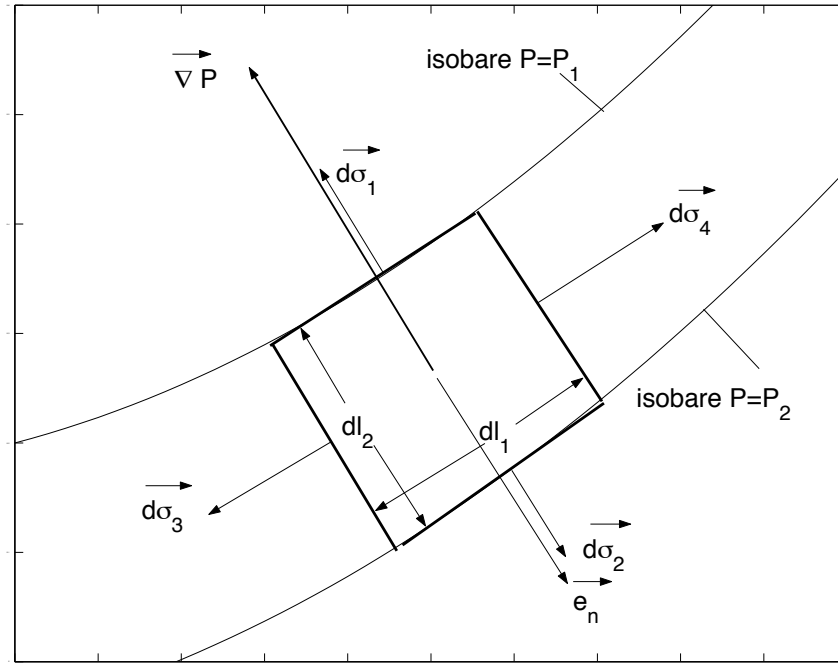
On constate que $|\nabla P|$ a comme unité $[N/m^3]$. Soit un petit élément de volume du fluide $dl_1 \times dl_2 \times dl_3$ avec dl_1 et dl_3 tangents à l'isobare et dl_2 perpendiculaire à l'isobare. Soit \vec{e}_n le vecteur unité perpendiculaire à cette isobare. Voir Figure 7. Calculons les forces de pression s'exerçant sur chacune des 6 faces de l'élément. Notons par $d\vec{\sigma}_i, i = 1..6$ les éléments de surface de chacune des 6 faces, pointant vers l'extérieur (par convention). Sur la face no.1, $d\vec{\sigma}_1 = -dl_1 dl_3 \vec{e}_n$ et la force de pression exercée sur cette face est

$$-P_1(-dl_1 dl_3 \vec{e}_n) .$$

Sur la face no.2, $d\vec{\sigma}_2 = +dl_1 dl_3 \vec{e}_n$ et la force de pression exercée sur cette face est

$$-P_2(dl_1 dl_3 \vec{e}_n) .$$

On fait de même pour les faces nos 3 et 4, puis 5 et 6. La résultante des forces de pression s'exerçant sur la particule fluide est la somme de ces expressions. Les contributions des

FIG. 7 – ∇P comme force de pression par unité de volume.

faces 3,4,5,6 s'annulent 2 à 2, et il reste :

$$\vec{F} = (P_1 - P_2) dl_1 dl_3 \vec{e}_n .$$

Multipliant et divisant par dl_2 ,

$$\vec{F} = \frac{P_1 - P_2}{dl_2} \vec{e}_n dl_1 dl_2 dl_3 ,$$

puis faisant la limite $dl_2 \rightarrow 0$, on obtient

$$\vec{F} = -\nabla P d^3x , \quad (35)$$

où on a noté l'élément de volume $dV = d^3x = dl_1 dl_2 dl_3$.

Exemple : météo, carte des isobares et carte des vents. On observe qu'à nos latitudes il se produit souvent une situation où les zones de haute et basse pression (anticyclones, dépressions) sont stationnaires pour de longues périodes. Si on considère une particule fluide de l'air, elle subit une force de pression, opposée au gradient, qui tendrait à la pousser du côté des basses pressions, tendant donc à "remplir" celle-ci, et à équilibrer les pressions. Comment se fait-il alors que la pression reste stationnaire? La réponse est : les masses d'air ne sont pas statiques mais en mouvement autour des anticyclones et dépressions. C'est la *force de Coriolis* (rappel : due à la fois à la vitesse de la particule fluide dans le référentiel terrestre et à la rotation de la terre par rapport au référentiel des étoiles fixes) qui peut équilibrer celle de pression. Les masses d'air s'écoulent, dans cette situation, *tangentiellement* aux isobares. La force de Coriolis est telle que dans l'hémisphère Nord le mouvement des masses d'air tourne dans le sens

des aiguilles d'une montre autour des anticyclones et dans le sens inverse autour des dépressions. Dans l'hémisphère sud, c'est l'inverse.

Une interprétation physique du théorème du gradient

Math : soit un volume V de surface S . Soit f un champ scalaire. Le théorème du gradient est

$$\int \int \int_V \nabla f \, d^3x = \int \int_S f \, d\vec{\sigma} . \quad (36)$$

N.B. Par convention, on oriente les éléments d'une surface fermée vers l'extérieur.

Dans le cas d'un fluide et du champ scalaire de pression, on a vu que $-\nabla P d^3x$ est la force de pression s'exerçant sur une particule fluide de volume d^3x . Donc la force de pression totale s'exerçant sur un volume V du fluide est la somme de ces forces sur toutes les particules fluides contenues dans V , c'est-à-dire l'intégrale de volume de $-\nabla P d^3x$: on identifie avec le membre de gauche de l'équation ci-dessus. Mais la résultante des forces de pression s'exerçant sur le volume V doit être égale à la somme des forces de pression $-P d\vec{\sigma}$ s'exerçant par les "parois" de V (sa surface S). Donc à l'intégrale de surface de $-P d\vec{\sigma}$: on identifie avec le membre de droite de l'équation ci-dessus.

2.4 Equilibre statique

Soit un fluide de densité $\rho(\vec{x}, t)$ au repos, $\vec{v}(\vec{x}, t) = 0, \forall \vec{x}, \forall t$. Le fluide est soumis à la force de pesanteur (accélération de la pesanteur \vec{g}). Chaque particule fluide, de volume d^3x , a une masse ρd^3x . Elle est soumise à la force de pesanteur $(\rho d^3x)\vec{g}$ et aux forces de pression $-\nabla P d^3x$. La condition d'équilibre impose $\sum \vec{F} = 0$, donc

$$\boxed{-\nabla P + \rho \vec{g} = 0} . \quad (37)$$

Le cas le plus simple est celui d'un fluide incompressible ($\rho = \text{const}$), avec $\vec{g} = \text{const} = -g\vec{e}_z$, \vec{e}_z étant le vecteur unité dirigé verticalement vers le haut. On peut alors écrire

$$\rho \vec{g} = \nabla(-\rho g z)$$

et l'équation de condition statique, Eq.37, devient

$$\nabla(-P - \rho g z) = 0 ,$$

ce qui implique

$$P + \rho g z = \text{const} .$$

Par exemple, s'il s'agit d'eau, que $z = 0$ est sa surface et que P_0 est la pression atmosphérique à cet endroit, on a

$$P = P(z) = P_0 - \rho g z .$$

C'est un résultat bien connu : la pression augmente proportionnellement avec la profondeur. Mais **ATTENTION**, ce résultat n'est valable que pour un fluide incompressible STATIQUE. Il est **FAUX** lorsque le fluide est en mouvement !

La force d'Archimède s'obtient sous ces mêmes hypothèses : fluide statique incompressible ($\rho = \text{const}$) soumis à une pesanteur $\vec{g} = \text{const}$. La force d'Archimède est la résultante des forces de pression s'exerçant sur un corps (de volume V , surface S) plongé dans un fluide au repos :

$$\vec{F} = \int \int_S -P d\vec{\sigma} .$$

En utilisant le théorème du gradient, Eq.(36),

$$\vec{F} = \int \int \int_V -\nabla P d^3x ,$$

avec l'équation de la statique, Eq.(37), $\nabla P = \rho\vec{g}$,

$$\vec{F} = \int \int \int_V -\rho\vec{g} d^3x = -\rho\vec{g} \int \int \int d^3x = -(\rho V)\vec{g} .$$

On obtient le résultat bien connu :

$$\vec{F}_{Archimede} = -P \vec{o}i ds_{fluide\ deplace} .$$

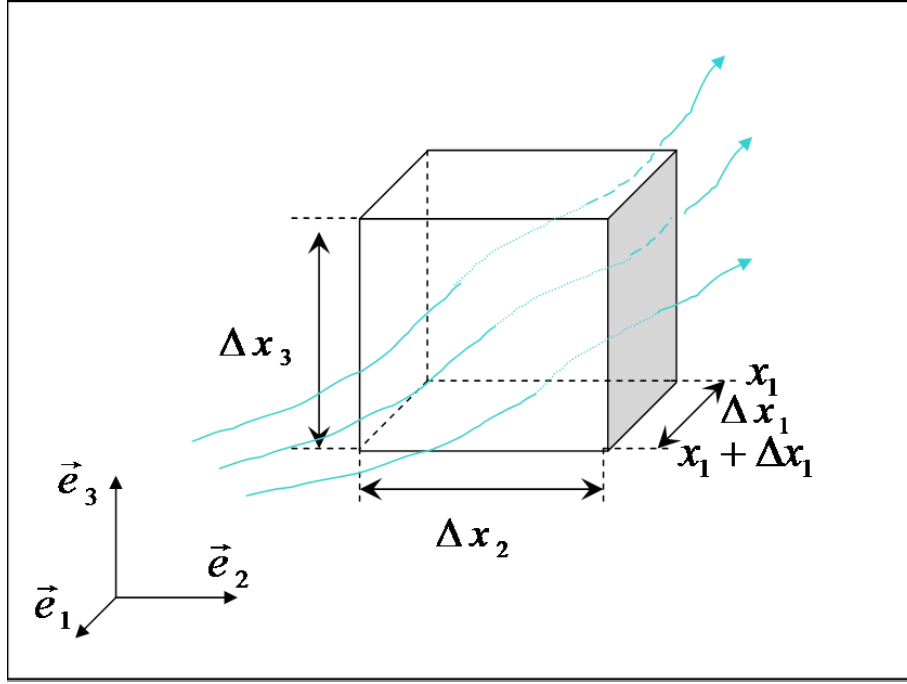
La statique des fluides est plus compliquée qu'il n'y paraît. Voir par exemple le "paradoxe de l'hydrostatique" (cf cours).

L'équation de la statique, Eq.37, semble très simple. Cependant il existe bien des situations où elle n'a pas de solution ! Dans le cas général, la densité d'un fluide dépend de sa température et donc de sa pression via l'équation d'état thermodynamique, et il est souvent impossible d'écrire le terme $\rho\vec{g}$ comme le gradient d'un champ (autrement dit la force extérieure par unité de volume ne dérive pas toujours d'un potentiel).

Dans bien d'autres situations encore, le fluide, initialement statique, se met *spontanément* en mouvement : il peut s'agir du fait que l'équilibre devient instable, voire que l'équilibre n'existe plus. C'est le cas dans les mouvements de convection thermique dans l'atmosphère, par exemple responsables de certains types de perturbations orageuses (formation de cumulus / cumulo-nimbus).

2.5 Conservation de la masse : équation de continuité

Soit un fluide de densité $\rho(\vec{x}, t)$ avec un champ de vitesses $\vec{v}(\vec{x}, t)$. Soit un petit volume fixe $\Delta V = \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$.

FIG. 8 – Flux de masse à travers les faces d'un élément de volume fixe ΔV .

Calculons le flux de masse à travers les faces de ce volume ΔV . Soit une des faces ($\Delta x_2 \Delta x_3$), en $x_1 + \Delta x_1$ (voir Figure 8). Le flux de masse à travers cette face est

$$\rho(x_1 + \Delta x_1, x_2, x_3, t) v_1(x_1 + \Delta x_1, x_2, x_3, t) \Delta x_2 \Delta x_3 .$$

Le flux sur la face opposée est

$$-\rho(x_1, x_2, x_3, t) v_1(x_1, x_2, x_3, t) \Delta x_2 \Delta x_3 .$$

Le signe “-” vient de l'orientation opposée de cette face. Sommant ces deux contributions, divisant et multipliant par Δx_1 , on obtient

$$\frac{\rho(x_1 + \Delta x_1, x_2, x_3, t) v_1(x_1 + \Delta x_1, x_2, x_3, t) - \rho(x_1, x_2, x_3, t) v_1(x_1, x_2, x_3, t)}{\Delta x_1} \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$$

Dans la limite $\Delta x_1 \rightarrow 0$, on a

$$\frac{\partial(\rho v_1)}{\partial x_1} d^3 x .$$

On fait de même pour les 4 autres faces, et on obtient le flux net à travers les faces de l'élément de volume :

$$\left(\frac{\partial(\rho v_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(\rho v_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial(\rho v_3)}{\partial x_3} \right) d^3 x = \nabla \cdot (\rho \vec{v}) d^3 x . \quad (38)$$

La masse est conservée. Ce qui veut dire que si l'élément de volume a reçu un flux net de masse, la masse contenue dans cet élément de volume a varié au cours du temps, avec une vitesse de variation

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} d^3 x \quad (39)$$

égale au flux net. Donc on doit avoir

$$\nabla \cdot (\rho \vec{v}) d^3x = -\frac{\partial \rho}{\partial t} d^3x . \quad (40)$$

Le signe “-” vient du fait qu’ un flux positif signifie un flux *sortant* (donc une diminution de la masse contenue dans l’élément de volume), et vice-versa. La relation est vraie pour tout élément de volume d^3x , donc :

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0}, \quad \forall \vec{x}, \forall t . \quad (41)$$

Cette équation s’appelle équation de continuité. Elle exprime le principe de **conservation de la masse**.

Théorème de Gauss (“de la divergence”)

Rappel (math) : pour un champ vectoriel \vec{A} , un volume V de surface S , le théorème de Gauss (ou “de la divergence”) est

$$\int \int \int_V \nabla \cdot \vec{A} d^3x = \int \int_S \vec{A} \cdot \vec{d}\sigma . \quad (42)$$

En l’appliquant avec $\vec{A} = \rho \vec{v}$, on peut écrire l’équation de continuité, Eq.(41) :

$$\boxed{\int \int \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} d^3x + \int \int_S \rho \vec{v} \cdot \vec{d}\sigma = 0}, \quad \forall V . \quad (43)$$

Le premier terme représente la vitesse de variation de la masse contenue dans V . Le deuxième représente le flux de masse à travers la surface S .

2.6 Rotationnel du champ de vitesses : le vecteur tourbillon

On définit le vecteur tourbillon comme le rotationnel du champ de vitesses : $\boxed{\vec{T} = \nabla \times \vec{v}}$. Cette quantité peut être interprétée comme “rotation du fluide”, mais il faut être prudent : de quelle rotation s’agit-il ?

Illustration 1. Soit un fluide avec un champ de vitesses $\vec{v}(\vec{x}, t) = v_1(x_2)\vec{e}_1 = \alpha x_2 \vec{e}_1$, avec α une constante donnée (voir Figure 9). On a alors, de la formule Eq.(15),

$$\vec{T} = \nabla \times \vec{v} = -\frac{\partial \alpha x_2}{\partial x_2} \vec{e}_3 = -\alpha \vec{e}_3 .$$

Bien que les trajectoires des particules fluides soient rectilignes le rotationnel n’est pas nul !

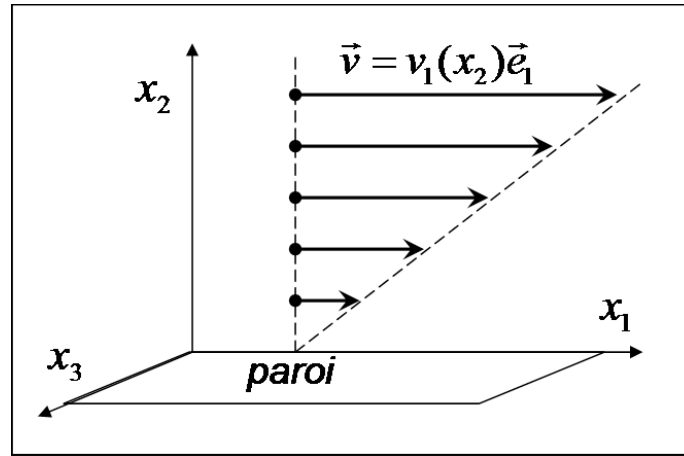
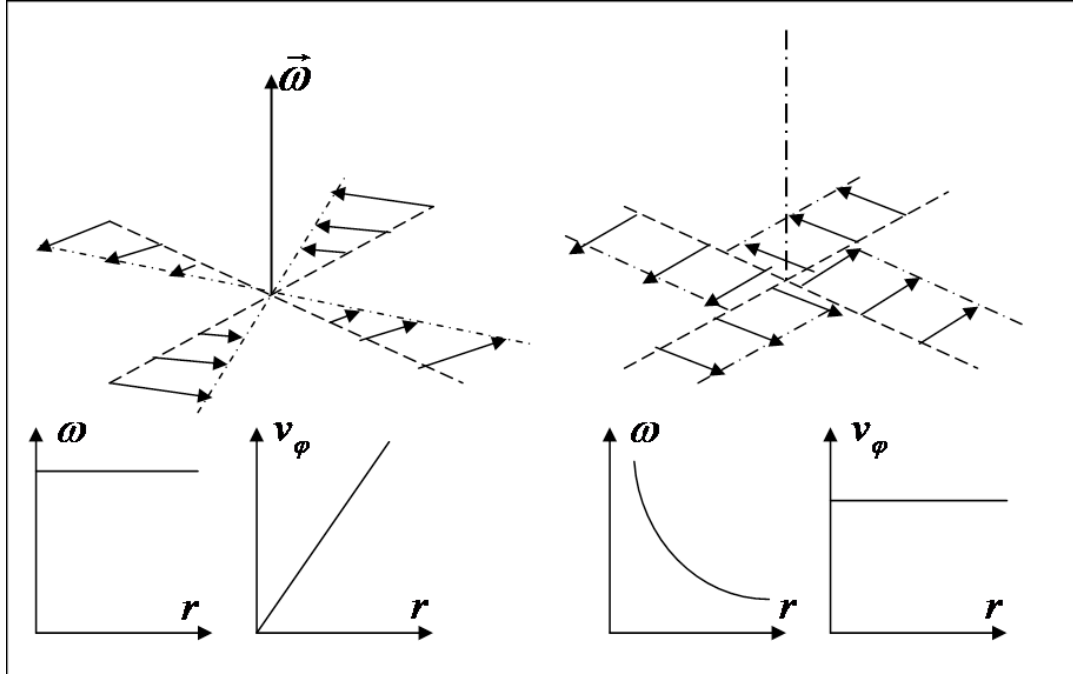
FIG. 9 – *Ecoulement rectiligne avec profil linéaire de vitesses.*FIG. 10 – *Ecoulement circulaire en rotation rigide (gauche) et en rotation différentielle (droite).*

Illustration 2. Soit un fluide en rotation rigide autour d'un axe fixe, à la vitesse angulaire constante $\vec{\omega}$ (Figure 10, gauche). Le champ de vitesses est $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{x} = -\omega x_2 \vec{e}_1 + \omega x_1 \vec{e}_2$, et la formule Eq.(15) donne

$$\nabla \times \vec{v} = \vec{e}_3 \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) = \vec{e}_3(\omega - (-\omega)) = 2\vec{\omega}.$$

Le “vecteur tourbillon”, rotationnel du champ de vitesses, semble bien proportionnel à la rotation du fluide, dans ce cas. Mais attention, l'illustration suivante montre que ce n'est pas toujours le cas.

Illustration 3. Soit un fluide en rotation *non rigide* autour d'un axe fixe, où la vitesse angulaire est fonction de la distance r à l'axe : $\vec{\omega} = \omega(r)\vec{e}_z$ (Figure 10, droite, cas $\omega(r) = \Omega_0 R_0/r$, avec Ω_0 et R_0 donnés, constants). On peut montrer que dans le cas $\omega(r) = \Omega_0(R_0/r)^2$, on a (cf exercices)

$$\nabla \times \vec{v} = 0.$$

Le fluide “tourne”, c.-a.-d. chaque particule fluide est en mouvement circulaire, mais le rotationnel est nul.

On peut visualiser le rotationnel en imaginant un grain de poussière ou de riz qui serait entraîné par le mouvement du fluide. Le rotationnel de \vec{v} est proportionnel à la vitesse angulaire de rotation du grain, *pas celle du fluide*. Testez cette idée sur les 3 illustrations ci-dessus.

2.7 Types de mouvements fluides (écoulements)

Un écoulement est dit **statique** si $\vec{v}(\vec{x}, t) = 0, \forall \vec{x}, \forall t$.

Un écoulement est dit **stationnaire** si $\partial \vec{v} / \partial t = 0, \forall \vec{x}, \forall t$.

Une **ligne de courant** à l'instant t est une ligne tangente à \vec{v} en chacun de ses points.

Un écoulement est dit **laminaire** si les lignes de courant coïncident avec les trajectoires des particules fluides. Sinon, il est dit **turbulent**.

Un écoulement est dit **irrotationnel** si $\nabla \times \vec{v} = 0, \forall \vec{x}, \forall t$.

Un fluide est dit **incompressible** si sa densité est constante et uniforme

$$\rho = \text{const} \Leftrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \text{ et } \frac{\partial \rho}{\partial x_i} = 0, i = 1, 2, 3. \quad (44)$$

Attention, incompressible ne veut **PAS DIRE P=const**.

3 Dynamique des fluides parfaits

3.1 Hypothèses et équations de base du modèle fluide parfait

Un fluide est dit **parfait** s'il satisfait les hypothèses suivantes :

– Il n'y a pas de forces de frottement ni aucune force dissipative de l'énergie mécanique.

En particulier, la viscosité du fluide est négligée. Les particules fluides subissent des transformations réversibles et adiabatiques.

On a vu à la section précédente (cinématique) que le mouvement d'un fluide est décrit par **5 fonctions de 4 variables** :

$$\vec{v}(\vec{x}, t), \quad \rho(\vec{x}, t), \quad P(\vec{x}, t) .$$

Il faut donc trouver **5 équations** pour ces 5 fonctions.

3 équations : $\boxed{m\vec{a} = \vec{F}}$ pour une particule fluide

Soit une particule fluide de volume d^3x . Supposons que le fluide soit soumis à la pesanteur (accélération de la pesanteur \vec{g}). La masse de la particule fluide est

$$m = \rho d^3x .$$

On a vu l'expression de l'accélération, Eq.(31),

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} .$$

Les forces s'exerçant sur la particule fluide sont les forces de pression et le poids :

$$\vec{F} = -\nabla P d^3x + \rho\vec{g} d^3x ,$$

où on a utilisé l'expression de la force de pression par unité de volume, Eq.(34). Les 3 équations ci dessus, insérées dans $m\vec{a} = \vec{F}$, donnent une équation, valable pour toute particule fluide et en tous temps :

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \boxed{\rho \left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} \right) = -\nabla P + \rho\vec{g}} , \forall \vec{x}, \forall t . \quad (45)$$

C'est l'**équation d'Euler**, qui est l'expression de la 2e loi de la dynamique de Newton, appliquée au cas d'un fluide parfait. On a 3 équations, pour les 3 composantes de \vec{v} , mais l'équation fait intervenir, au membre de droite, les champs P et ρ . Il faut encore 2 équations.

4e équation : la masse est conservée

On a vu à la Section 2.5 l'expression mathématique du principe de conservation de la masse, Eq.(41) :

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0}, \quad \forall \vec{x}, \forall t. \quad (46)$$

5e équation : équation d'état

Il faut une équation qui relie entre elles les variations de pression et de densité. Cette 5e équation dépend du type de fluide étudié. S'il s'agit d'un gaz parfait, alors, par hypothèse d'adiabaticité (c'est-à-dire pas d'échange de chaleur entre les particules fluides, $\delta Q = 0$), on aura : (cf cours de 1e année : thermodynamique)

$$PV^\gamma = \text{const}, \quad (47)$$

où γ est l'indice d'adiabaticité, rapport des chaleurs spécifiques. La signification de "const" est "constante pour une particule fluide donnée", donc *le long de la trajectoire de la particule fluide*. Ici, on a $\rho \sim 1/V$, donc

$$P\rho^{-\gamma} = \text{const le long de la trajectoire.} \quad (48)$$

Ce qui s'exprime de façon équivalente par :

$$\boxed{\frac{d}{dt} (P\rho^{-\gamma}) = 0}, \quad \forall \vec{x}, \forall t. \quad (49)$$

Ainsi, les équations de base d'un fluide parfait, gaz parfait, sont (45)(46)(49). Il s'agit d'un système d'équations aux dérivées partielles, non linéaire, pour 5 fonctions de 4 variables. La difficulté mathématique est considérable. Il n'est pas facile du tout de trouver des solutions pour un tel système d'équations.

Pour d'autres systèmes physiques, les liquides par exemple, on fait souvent l'approximation du fluide incompressible, soit $\rho = \text{const}$. Donc l'équation (46) devient

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (50)$$

et, au lieu de l'équation d'état (49), on a

$$\rho = \text{const.} \quad (51)$$

Dans tous les cas, il faut rajouter les conditions aux limites. c'est un problème non trivial dans le cas d'une surface libre, comme la surface de l'eau par exemple. Au bord d'un corps solide immobile de surface S , on impose

$$\vec{v} \cdot \vec{d\sigma} = 0, \quad \forall \vec{x} \in S, \quad (52)$$

où $\vec{d\sigma}$ est le vecteur élément de surface, normal à la surface.

N.B. Dans le cas particulier d'un fluide incompressible irrotationnel, les équations

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad \text{et} \quad \nabla \times \vec{v} = 0 \quad (53)$$

sont les mêmes que celles pour un champ magnétique (statique) dans le vide (voir le Chapitre Electromagnétisme)!

3.2 Equation de Bernoulli

Sous certaines hypothèses, on peut trouver une relation très utile pour résoudre des problèmes d'écoulement. Nous allons d'abord présenter la dérivation de cette relation, appelée *équation de Bernoulli*, directement basée sur les principes physiques de *conservation de l'énergie* et de *conservation de la masse*.

Hypothèses : soit un

1. fluide
2. parfait
3. incompressible
4. en écoulement stationnaire
5. dans un champ de pesanteur \vec{g} constant.

L'hypothèse (1) renvoie au concept de "particule fluide", voir Section 1.

L'hypothèse (2) signifie pas de frottement, pas de viscosité, pas d'échange de chaleur (= processus adiabatique) (autrement dit : pas d'échange d'énergie cinétique sous forme désordonnée entre les particules fluides).

L'hypothèse (3) signifie $\rho(\vec{x}, t) = \text{const} \Rightarrow \partial\rho/\partial t = 0, \partial\rho/\partial x_i = 0, i = 1, 2, 3, \forall\vec{x}, \forall t$.

L'hypothèse (4) signifie $\partial\vec{v}/\partial t = 0, \partial P/\partial t = 0, \forall\vec{x}, \forall t$. L'écoulement est nécessairement laminaire (les lignes de courant coïncident avec les trajectoires), et les lignes de courant sont *fixes*.

L'hypothèse (5) se généralise aisément au cas de toute force extérieure dérivant d'un potentiel, c'est-à-dire s'il existe un potentiel scalaire $\phi(\vec{x})$ tel que la force extérieure par unité de volume peut s'écrire $\vec{F} = -\rho\nabla\phi$. (Dans notre cas $\phi = gz$, z étant la coordonnée cartésienne verticale vers le haut).

Soit un morceau du fluide, "tube de courant", délimité par deux surfaces S_A et S_C , avec $S_A \perp \vec{v}_A$ et $S_C \perp \vec{v}_C$, et par un ensemble de lignes de courant passant par les bords de S_A et S_C . A l'instant t le tube de courant est noté $ABCD$. A l'instant $t' = t + \Delta t$ le tube de courant est noté $A'B'C'D'$. Voir Figure 11.

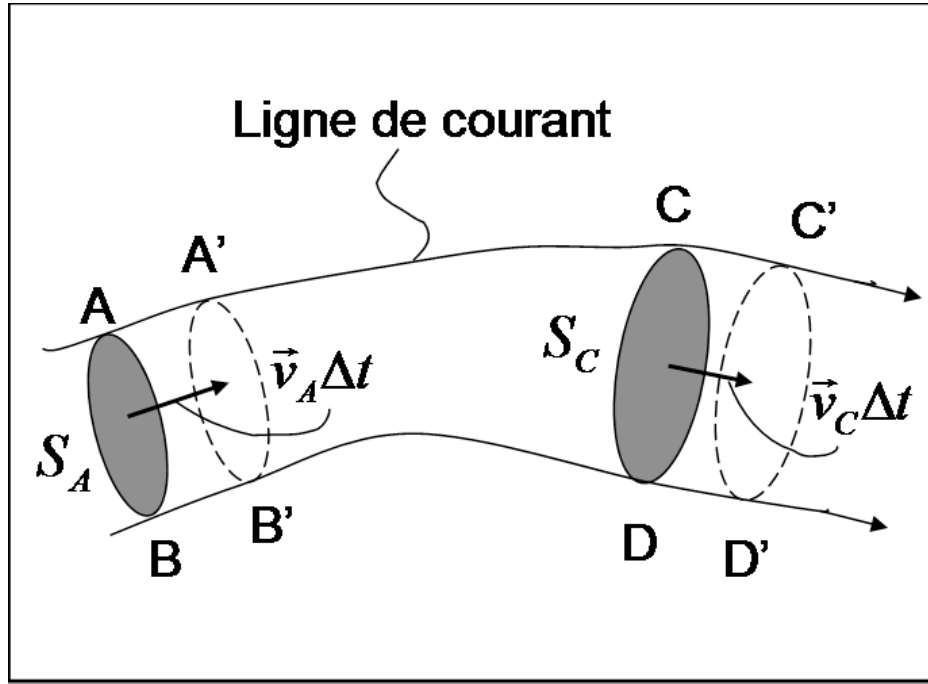


FIG. 11 – Tube de courant, délimité par deux surfaces S_A et S_C , et par un ensemble de lignes de courant passant par le bord de S_A et S_C . A l’instant t le tube de courant est noté $ABCD$. A l’instant $t + \Delta t$ le tube de courant est noté $A'B'C'D'$.

La démarche est d’appliquer le théorème de l’énergie mécanique à ce tube de courant : on est en droit de le faire, en vertu de l’hypothèse (2).

$$\Delta E_{cin} + \Delta E_{pot} = \Delta W , \quad (54)$$

où ΔE_{cin} est la variation de l’énergie cinétique, ΔE_{pot} la variation de l’énergie potentielle de la force extérieure, et ΔW est le travail des forces de pression, entre les instants t et $t' = t + \Delta t$.

En comparant les tubes à l’instant $t(ABCD)$ et à l’instant $t'(A'B'C'D')$, on constate que le système a “perdu” la partie $ABA'B'$ et “gagné” la partie $CDC'D'$. Le principe de conservation de la masse implique que la masse contenue dans $ABA'B'$ est égale à la masse contenue dans $CDC'D'$ (voir Figure 11). Donc

$$\rho S_A v_A \Delta t = \rho S_C v_C \Delta t$$

et les volumes de $ABA'B'$ et $CDC'D'$ sont égaux :

$$\Delta V_A = S_A v_A \Delta t = S_C v_C \Delta t = \Delta V_C = \Delta V . \quad (55)$$

La variation d’énergie cinétique est

$$\Delta E_{cin} = -E_{cin}(ABA'B') + E_{cin}(CDC'D') = -\frac{1}{2}\rho(\Delta V)v_A^2 + \frac{1}{2}\rho(\Delta V)v_C^2 . \quad (56)$$

La variation d’énergie potentielle est

$$\Delta E_{pot} = -\rho(\Delta V)gz_A + \rho(\Delta V)gz_C . \quad (57)$$

Le travail des forces de pression est la somme du travail de la force de pression sur la face S_A et du travail de la force de pression sur la face S_C . Pendant Δt la face S_A s'est déplacée de $\vec{v}_A \Delta t$ et la force de pression est $-P_A d\vec{\sigma}_A$: le déplacement est parallèle à la force de pression et de même direction. Pendant Δt la face S_C s'est déplacée de $\vec{v}_C \Delta t$ et la force de pression est $+P_C d\vec{\sigma}_C$: le déplacement est parallèle à la force de pression et de direction opposée. On notera que le travail des forces de pression sur les faces latérales du tube est nulle, car la vitesse est tangente en tout point de cette surface, en vertu de l'hypothèse (4). Donc

$$\Delta W = +P_A S_A v_A \Delta t - P_C S_C v_C \Delta t .$$

Or, $S_A v_A \Delta t = S_C v_C \Delta t = \Delta V$, en vertu de l'Eq. (55), et on obtient

$$\Delta W = (P_A - P_C) \Delta V . \tag{58}$$

Insérant (56)(57)(58) dans l'Eq. (54), on obtient, après simplification par ΔV ,

$$-\frac{1}{2} \rho v_A^2 + \frac{1}{2} \rho v_C^2 - \rho g z_A + \rho g z_C = P_A - P_C ,$$

$$\boxed{\frac{1}{2} \rho v_A^2 + \rho g z_A + P_A = \frac{1}{2} \rho v_C^2 + \rho g z_C + P_C} , \tag{59}$$

pout toute paire de points A, C situés **le long de la même ligne de courant**. Autrement dit

$$\boxed{\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z + P = \text{const le long d'une ligne de courant}} . \tag{60}$$

C'est l'**équation de Bernouilli**. La valeur de "const" dépend en général de la ligne de courant considérée. Seulement dans les cas d'écoulement fluides irrotationnels (en plus des hypothèses (1) à (5) ci-dessus) la valeur de cette "const" est la même pour toute ligne de courant du fluide (démonstration : plus loin).

Une analyse dimensionnelle (unités) des termes de cette équation indique qu'il s'agit de $kg m^{-1} s^{-2} = kg m^2 s^{-2} / m^3$, donc une *énergie par unité de volume*. Le premier terme est une énergie cinétique par unité de volume, le deuxième une énergie potentielle de la force extérieure par unité de volume, et le troisième, la pression P , est une énergie thermique par unité de volume.

N.B. Dans la limite $v \rightarrow 0$, on retrouve l'équation de la statique $P + \rho g z = \text{const}$. Cependant, l'équation de Bernouilli nous montre que **l'équation de la statique n'est plus vraie dès lors que le fluide est en mouvement**. "La pression dans un tuyau n'est pas la même si le robinet est ouvert ou fermé". De nombreuses erreurs sont faites couramment lors de l'application de Bernouilli ; c'est peut-être dû au fait que l'application de celle-ci donne souvent des résultats contraires à notre "première intuition", par exemple que la pression est d'autant plus *basse* que la vitesse est *grande*.

3.3 D'Euler à Bernouilli

Dans cette section, on démontre l'équation de Bernouilli à partir des équations du mouvement du fluide parfait obtenues à la Section 3.1 et on fait les mêmes hypothèses (1) à (5) qu'à la section 3.2 ($\rho = \text{const}$, $\delta Q = 0$, $\partial/\partial t = 0$, $\vec{g} = \text{const}$). On part de l'équation d'Euler (rappel : $m\vec{a} = \vec{F}$ pour une particule fluide), Eq.(45), et de l'hypothèse (4) $\partial\vec{v}/\partial t = 0$:

$$\rho(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = -\nabla P + \rho\vec{g} .$$

Multipliant scalairement cette équation par \vec{v} , on a

$$\rho\vec{v} \cdot [(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}] - \rho\vec{g} \cdot \vec{v} + \nabla P \cdot \vec{v} = 0 . \quad (61)$$

On utilise une identité vectorielle (math) :

$$\nabla \left(\frac{v^2}{2} \right) = (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} + \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) . \quad (62)$$

Substituant le terme $(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}$ dans l'Eq.(61), notant que le terme $\vec{v} \times (\nabla \times \vec{v})$ est perpendiculaire à \vec{v} , il vient :

$$\rho\vec{v} \cdot \nabla \left(\frac{v^2}{2} \right) - \rho\vec{g} \cdot \vec{v} + \nabla P \cdot \vec{v} = 0 .$$

Le premier terme est

$$\frac{d}{dt} \left(\rho \frac{v^2}{2} \right) .$$

Le deuxième terme est, avec $\vec{g} = -g\vec{e}_z \Rightarrow \vec{g} \cdot \vec{v} = -g dz/dt$,

$$\frac{d}{dt} (\rho g z) .$$

Le troisième terme est

$$\frac{dP}{dt} .$$

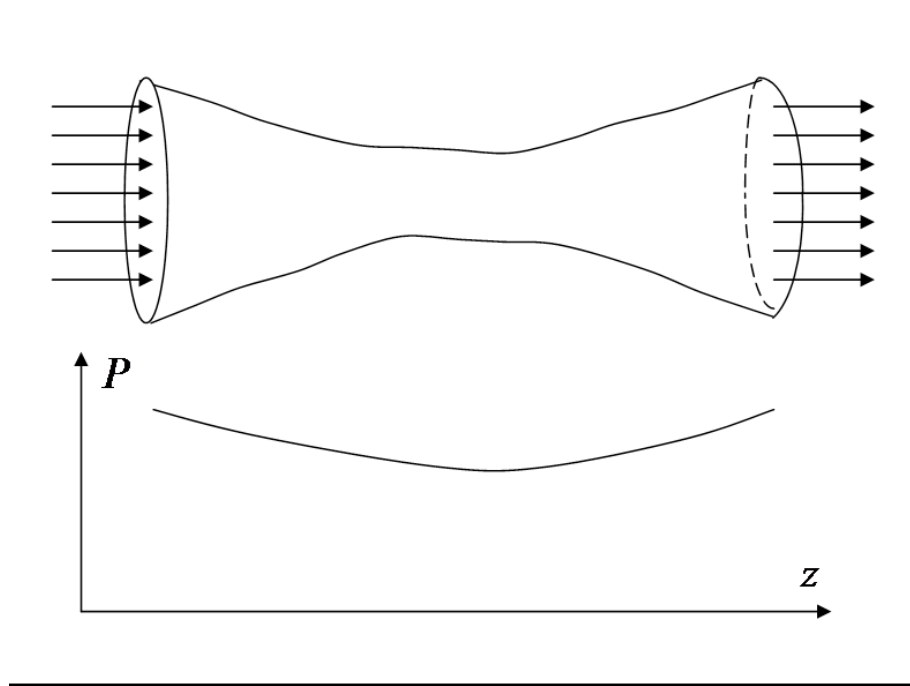
On a donc :

$$\frac{d}{dt} \left(\rho \frac{v^2}{2} + \rho g z + P \right) = 0 .$$

La signification de d/dt implique donc que

$$\rho \frac{v^2}{2} + \rho g z + P = \text{const le long de la trajectoire,}$$

qui coïncide avec une ligne de courant puisque l'écoulement est stationnaire. On retrouve bien l'équation de Bernouilli, Eq.(60).

FIG. 12 – *Tube Venturi*

3.4 Applications de Bernouilli

Exemple 1 : tuyau avec rétrécissement

L'appareil montré en expérience au cours s'appelle tube Venturi (Figure 12). On constate que la pression est la plus faible aux endroits de l'écoulement où le tube est le plus étroit. Utilisez l'équation de Bernouilli pour interpréter ce résultat.

Que se passe-t-il si on réduit encore le diamètre du tube? L'application de Bernouilli montre qu'il existe un diamètre minimal pour lequel la pression deviendrait nulle. Pour un diamètre encore plus petit, comme la pression ne peut pas devenir négative, en fait il apparaît des bulles de vide dans l'écoulement : c'est le phénomène de la *cavitation*, qui peut poser des problèmes pour les turbines, les hélices, etc.

A l'inverse, si le tube s'élargit au lieu de se rétrécir, la pression sera *plus élevée à l'endroit de l'élargissement*. Si le tube est un vaisseau sanguin, cela peut conduire à des dégâts... (on parle, en termes médicaux, d' *anévrisme*; le rétrécissement s'appelle *sténose*).

Revenant à l'expérience du cours, on constate que la pression à la sortie du tube est inférieure à celle à l'entrée. Cet effet n'est pas prédit par l'équation de Bernouilli. Il est dû au fait que le fluide réel n'est pas idéal : les forces de viscosité sont responsables de la chute de pression le long de l'écoulement.

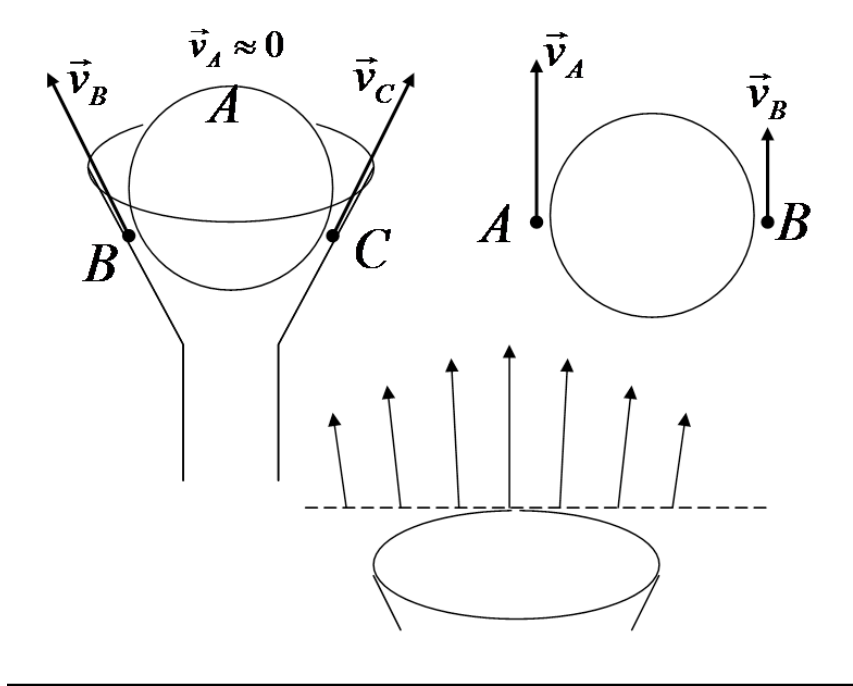


FIG. 13 – Balle de ping-pong dans un jet d'air.

Exemple 2 : balle de ping-pong dans un flux d'air.

Dans le cas où la balle est tout près de l'entonnoir, la vitesse de l'air au voisinage des points proches (B et C sur la Figure 13) est supérieure à la vitesse au sommet de la balle (p.ex. point A). Par Bernouilli, la pression en B et C est inférieure à la pression en A. La résultante des forces de pression sera dirigée vers le bas, et aura donc tendance à “plaquer” la balle contre l'entonnoir.

Dans le cas où la balle est loin de l'entonnoir, il y a un profil des vitesses : la vitesse de l'écoulement est plus élevée au centre du jet d'air qu'aux bords, et donc si la balle est décentrée par rapport au jet d'air, la pression du côté du centre (A) est plus faible que du côté du bord (B). La résultante des forces de pression est dirigée de B vers A, donc aura tendance à ramener la balle au centre du jet d'air. Elle agit comme une force de rappel. La balle semble attirée par les régions de l'écoulement où la vitesse est la plus rapide.

Exemple 3 : tube de Pitot, mesure de la vitesse d'un avion

On place un obstacle dans un écoulement d'air (voir Figure 14). On mesure la pression en un point A situé face à l'écoulement et en un point B situé sur le côté (B). De Bernouilli, négligeant ρgz , on a

$$\rho \frac{v_A^2}{2} + P_A = \rho \frac{v_B^2}{2} + P_B$$

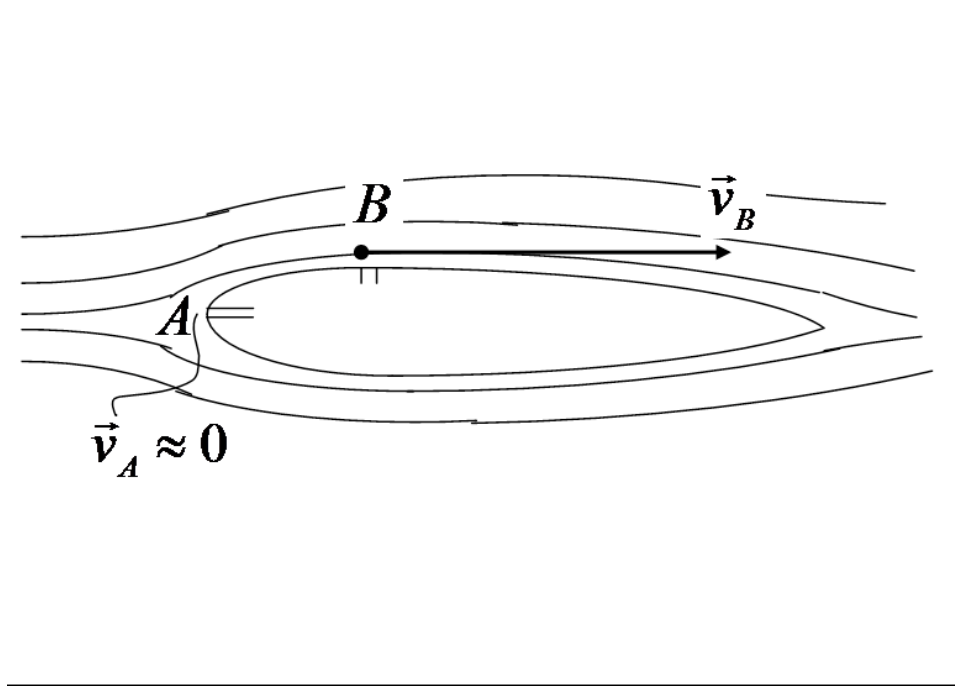


FIG. 14 – Tube de Pitot pour la mesure de la vitesse d'un écoulement.

Or, la vitesse en A est nulle, et donc on obtient

$$v_B = \sqrt{\frac{2(P_A - P_B)}{\rho}}$$

Exemple 4 : effet Magnus

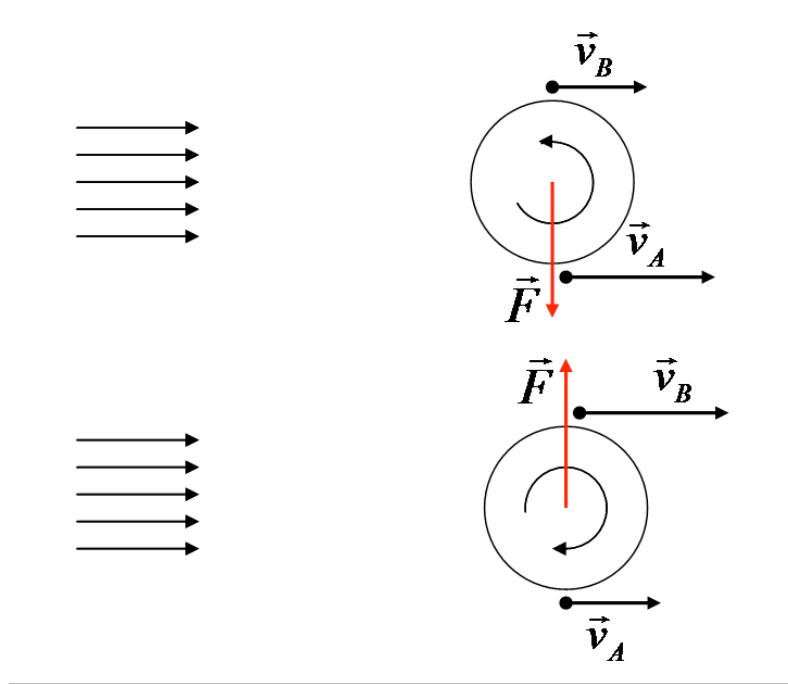
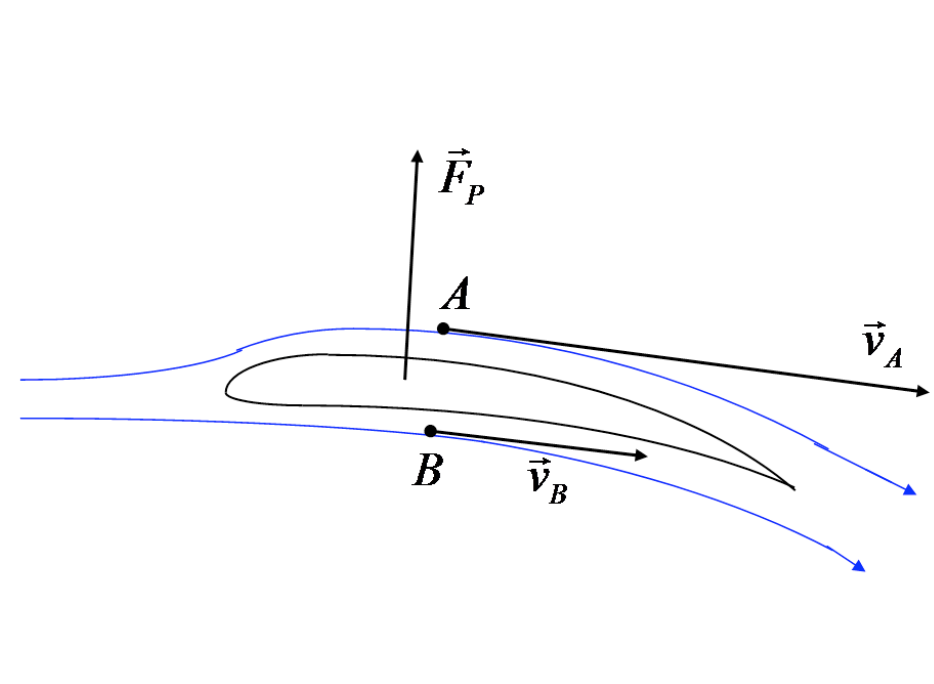
C'est l'effet responsable des trajectoires "non standard" des balles de tennis où de football lorsqu'elles sont en rotation.

L'expérience du cours montre un cylindre en rotation dans un écoulement. L'interaction de la surface en rotation avec le fluide entraîne celui-ci dans sa rotation. Dans le cas de la Figure 15, image du haut, la vitesse en A est supérieure à la vitesse en B, et donc, par Bernoulli, $P_A < P_B$. La résultante des forces de pression sera dirigée vers le bas.

Si on change le sens de rotation, Figure 15, image du bas, alors $v_B > v_A$ et par Bernoulli $P_A > P_B$. La résultante des forces de pression sera dirigée vers le haut.

Exemple 5 : portance d'une aile

Le profil d'une aile (Figure 16) est tel que le mouvement de l'air peut être considéré comme la somme d'une translation (à la vitesse \vec{v}_∞ , qui est la vitesse de l'air loin de l'aile) et d'une rotation au voisinage du profil. La vitesse résultante est plus grande sur

FIG. 15 – *Effet Magnus. Force de portance. Lift ou slice.*FIG. 16 – *Force de portance d'une aile.*

la face supérieure du profil que sur sa face inférieure ($v_A > v_B$). Bernouilli donne donc $P_A < P_B$, ce qui résulte en une force dirigée perpendiculairement au déplacement de l'aile, vers le haut. C'est la force de portance, \vec{F}_p . On peut montrer que cette force est proportionnelle à la *circulation du champ de vitesses autour du profil* :

$$|F_p| \propto \left| \oint \vec{v} \cdot d\vec{l} \right| \rho v_\infty L \quad (63)$$

Dans la réalité, des tourbillons peuvent se détacher de l'aile, et ainsi la partie de la circulation qu'ils emmènent est perdue pour la portance. L'effet de la turbulence de l'air implique que Bernouilli n'est pas strictement applicable. De plus, une force parallèle au déplacement de l'aile apparaît : la force de traînée, \vec{F}_t . On utilise les formules semi-empiriques suivantes pour les forces exercées sur des obstacles dans un écoulement :

$$\vec{F}_p = \frac{1}{2} \rho v_\infty^2 S C_y \vec{e}_y \quad (64)$$

$$\vec{F}_t = \frac{1}{2} \rho v_\infty^2 S C_x \vec{e}_x \quad (65)$$

avec ρ : densité du fluide, S : aire d'une surface de référence de l'obstacle, v_∞ : vitesse du fluide par rapport à l'obstacle loin de celui-ci, C_y : coefficient de portance et C_x : coefficient de traînée. C_x et C_y sont des nombres sans dimensions. Ils dépendent de la forme et de l'orientation de l'obstacle. Il y a 2 façons de les déterminer : en faisant des essais en tunnel et par la simulation numérique. Souvent une combinaison des deux est nécessaire. Le fait de pouvoir simuler des écoulements en faisant des essais en grandeur réduite dans des tunnels, et la façon d'extrapoler vers la grandeur réelle seront examinés à la Section 5 "similarité et nombre de Reynolds".

Exemple 6. Bouteille de Champagne

Dans une bouteille de Champagne fermée, le fluide est au repos, et la pression en haut du liquide est P_{in} . L'application de la statique implique que la pression au fond de la bouteille est $P_{in} + \rho gh$, où ρ est la densité du liquide et h la hauteur de la bouteille.

Lorsqu'on fait sauter le bouchon, la pression en haut du liquide décroît brutalement jusqu'à la pression atmosphérique P_0 . Le liquide se met en mouvement ($v \neq 0$) dans le goulot. La pression au bas de la bouteille n'est **PAS** $P_0 + \rho gh$ comme dans la statique, mais l'application de Bernouilli entre le fond de la bouteille (où $v \approx 0$) et le sommet ($v \neq 0$) donne une valeur différente : voir en exercices.

Evidemment l'équation de Bernouilli ne permet pas de décrire les bulles...

4 Dynamique des fluides visqueux

Dans cette section, on se restreindra au cas des fluides incompressibles.

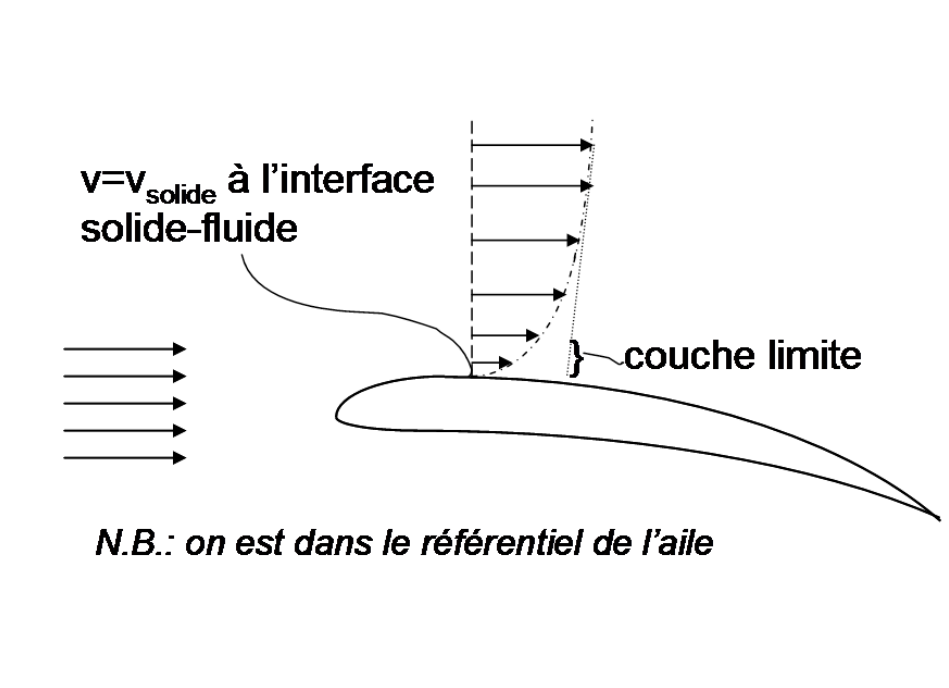


FIG. 17 – Profil de vitesses au voisinage de la surface d'une aile, dans un fluide visqueux. On se trouve dans le référentiel de l'aile.

4.1 Viscosité

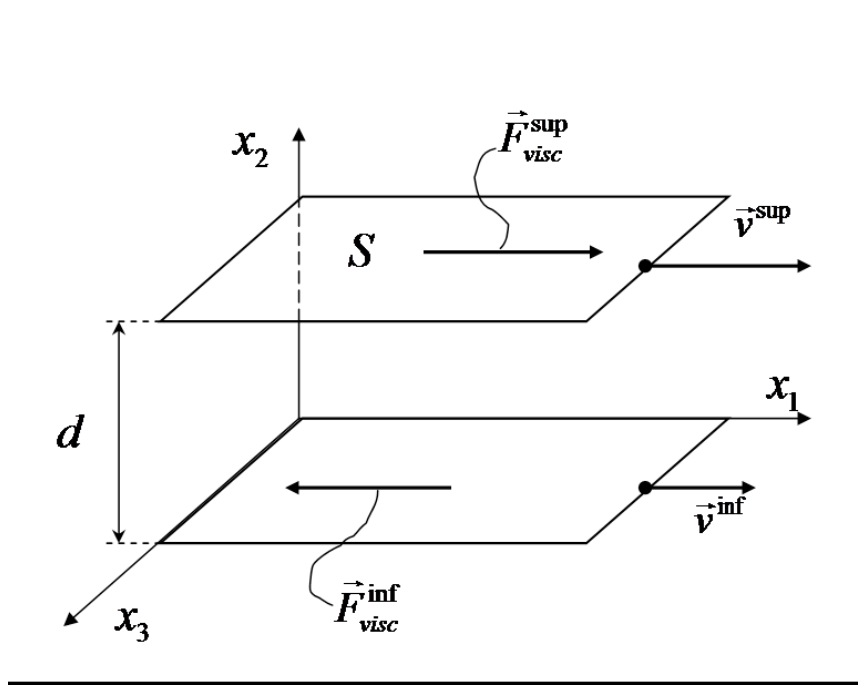
La démarche est de partir de constatations expérimentales.

1. Il existe une force de résistance au cisaillement du fluide. Par exemple, faire glisser 2 plaques parallèles entourant un fluide nécessite l'application d'une force tangente aux plaques.
2. $\vec{v}_{fluide} - \vec{v}_{solide} = 0$ à l'interface fluide-solide. Par exemple, on constate que la poussière reste collée aux pales d'un ventilateur.
3. Dans l'expérience du tube Venturi (voir Exemple 1, Section 3.4, Figure 12) on constate une chute de pression dans la direction du mouvement du fluide.

Tenir compte de (1) implique une modification des équations du mouvement par rapport au cas du fluide idéal (Eq.d'Euler, 45) : il faut y rajouter une **force de viscosité par unité de volume**.

Tenir compte de (2) implique une modification des conditions aux limites : dans le cas du fluide idéal, on avait $(\vec{v}_{fluide} - \vec{v}_{solide}) \cdot d\vec{\sigma} = 0$. La différence est l'apparition d'une couche limite au voisinage de l'interface solide-fluide (Figure 17).

La constatation (3) implique que le fluide perd de l'énergie lors de son mouvement. Autrement dit, la viscosité est dissipative, et les particules fluides échangent de la chaleur (processus non-adiabatique, $\delta Q \neq 0$).

FIG. 18 – *Fluide entre deux plaques parallèles en mouvement uniforme*

La force de viscosité comme force de résistance au cisaillement

Considérons un fluide entre 2 plaques parallèles (Figure 18). Pour faire glisser la plaque supérieure par rapport à la plaque inférieure à vitesse constante, il faut appliquer une force \vec{F}_{visc}^{sup} sur la plaque supérieure et une force \vec{F}_{visc}^{inf} sur la plaque inférieure. On constate de plus :

- La force est tangente à la plaque et proportionnelle (symbole \propto) à la différence de vitesses des deux plaques : $\vec{F}_{visc} \propto (\vec{v}^{sup} - \vec{v}^{inf})$.
- La force est proportionnelle à la surface S des plaques : $|\vec{F}_{visc}| \propto S$.
- La force est inversement proportionnelle à la distance d entre les plaques : $|\vec{F}_{visc}| \propto 1/d$.
- $\vec{F}_{visc}^{inf} = -\vec{F}_{visc}^{sup}$.

On résume tout ceci dans l'expression de la force (appliquée *sur* le fluide) :

$$\boxed{\vec{F}_{visc}^{sup} = \eta \frac{S(\vec{v}^{sup} - \vec{v}^{inf})}{d}},$$

où η (“eta”) est appelé **coefficient de viscosité**. Il a pour unité $kg\ m^{-1}\ s^{-1}$, appelée “Poiseuille”. En faisant la limite $d \rightarrow 0$, on obtient :

$$\boxed{\vec{F}_{visc}^{sup} = \eta S \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \vec{e}_1}. \quad (66)$$

La force de viscosité travaille, car elle est parallèle à \vec{v} . Or, dans notre exemple, la vitesse est constante et horizontale, donc $E_{cin} = const$ et $E_{pot} = const$. Il s'ensuit que le travail fournit par \vec{F}_{visc} ne change pas l'énergie mécanique. En fait, il se transforme en chaleur.

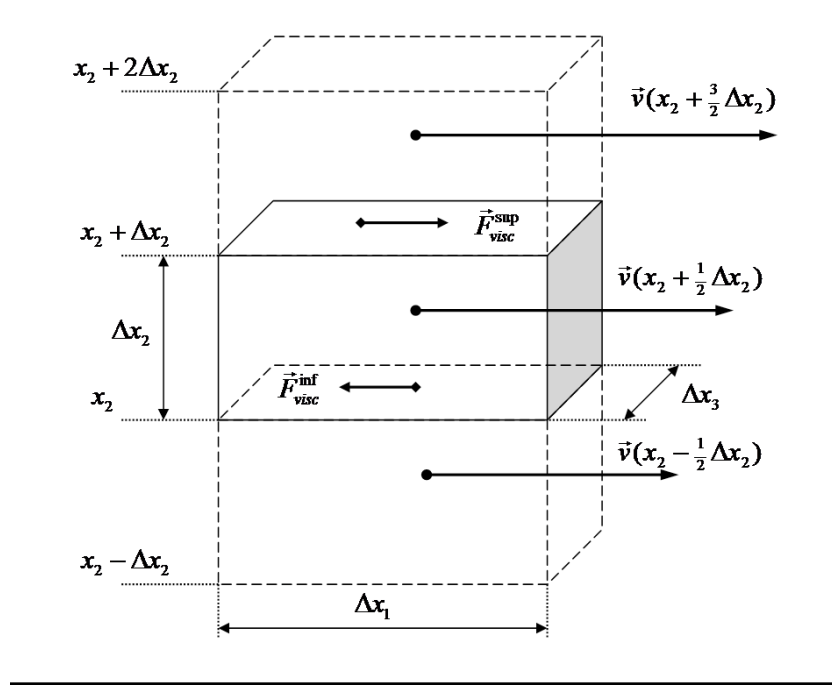


FIG. 19 – Forces de viscosité s'exerçant sur une particule fluide

Donc $\delta Q \neq 0$ en présence de viscosité. Le coefficient de viscosité η dépend du type de fluide et de sa température.

N.B. Vérifiez que η a les bonnes unités, c'est-à-dire que l'Eq.(66) donne bien une force en Newton.

Force de viscosité par unité de volume

Par extension, on suppose que le résultat ci-dessus, Eq.(66), est vrai pour toute particule fluide à l'intérieur du fluide. On a obtenu une expression qui est une force de **surface**. Le but est d'obtenir une formule pour la force de viscosité par unité de **volume**.

On considère un élément du fluide et on place des axes cartésiens avec $x_1 \parallel \vec{v}$ au centre de l'élément (Figure 19). On place l'axe x_2 de telle sorte qu'au voisinage de l'élément la vitesse ne soit fonction que de x_2 . La force de viscosité sur la face supérieure de l'élément, en $x_2 + \Delta x_2$, est obtenue de l'Eq.(66), la surface S étant égale à $\Delta x_1 \Delta x_3$:

$$\vec{F}_{visc}^{sup} = \eta \Delta x_1 \Delta x_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_2}(x_2 + \Delta x_2) \vec{e}_1 .$$

La force de viscosité sur la face inférieure de l'élément, en x_2 , est

$$\vec{F}_{visc}^{inf} = -\eta \Delta x_1 \Delta x_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_2}(x_2) \vec{e}_1 .$$

Le signe “-” vient de l'orientation opposée de cette face (voir Figure 19). En sommant ces deux contributions, on obtient la résultante des forces de viscosité s'exerçant sur

l'élément :

$$\vec{F}_{visc} = \eta \Delta x_1 \Delta x_3 \Delta x_2 \frac{1}{\Delta x_2} \left[\frac{\partial v_1}{\partial x_2}(x_2 + \Delta x_2) - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}(x_2) \right] \vec{e}_1 .$$

En faisant la limite vers une particule fluide ($\Delta x_i \rightarrow 0$), on obtient

$$\boxed{\vec{F}_{visc} = \eta \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} \vec{e}_1 d^3 x} . \quad (67)$$

On peut généraliser pour une orientation quelconque du repère $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ par rapport à \vec{v} . On obtient

$$\boxed{\vec{F}_{visc} = \eta \nabla^2 \vec{v} d^3 x} . \quad (68)$$

Autrement dit,

$$\boxed{\eta \nabla^2 \vec{v}} \quad (69)$$

est la **force de viscosité par unité de volume**. (N.B. Vérifiez que (69) a les bonnes unités!) On rappelle que tout ceci n'est valable que dans l'hypothèse de fluides incompressibles. Le laplacien d'un champ vectoriel est, en coordonnées cartésiennes :

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{v} &= \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} (v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2 + v_3 \vec{e}_3) \\ &+ \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} (v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2 + v_3 \vec{e}_3) \\ &+ \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} (v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2 + v_3 \vec{e}_3) \end{aligned} \quad (70)$$

4.2 Equations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible

En écrivant $m\vec{a} = \vec{F}$ pour une particule fluide, en procédant de même qu'à la section 3.1, en rajoutant, par rapport au cas du fluide parfait, (Eq.(45)), la force de viscosité par unité de volume, on obtient :

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \boxed{\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = -\nabla P + \rho \vec{g} + \eta \nabla^2 \vec{v}} , \forall \vec{x}, \forall t . \quad (71)$$

C'est l'**équation de Navier-Stokes** incompressible. On a aussi les équations

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{v} = 0} , \quad (72)$$

$$\boxed{\rho = const} . \quad (73)$$

La condition aux limites (interface fluide-solide) est :

$$\boxed{\vec{v} - \vec{v}_{solide} = 0} . \quad (74)$$

Exemple de résolution de l'équation de Navier-Stokes

On aimerait trouver l'écoulement fluide entre deux plaques parallèles horizontales, séparées d'une distance d , l'une étant immobile et l'autre en translation uniforme à la vitesse \vec{v}_0 . C'est le même cas qu'à la figure 18. On suppose la pression sur la face supérieure constante P_0 donnée. Plaçons un système d'axes cartésien avec $\vec{e}_1 \parallel \vec{v}_0$, \vec{e}_2 vertical vers le haut.

Cherchons une solution stationnaire ($\partial/\partial t = 0$), avec \vec{v} et P ne dépendant que de l'altitude x_2 :

$$\vec{v} = v_1(x_2)\vec{e}_1 \quad P = P(x_2) .$$

On cherche une solution, $v_1(x_2), P(x_2)$, satisfaisant (71) (72)(73). [N.B. : ce n'est pas la seule solution possible de Navier-Stokes !]

Montrons que l'Eq.(72) est satisfaite pour tout choix arbitraire de $v_1(x_2)$. De la définition de la divergence,

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} ,$$

avec $v_2 = v_3 = 0$,

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_1(x_2)}{\partial x_1} = 0 .$$

Le membre de gauche de (71) contient $d\vec{v}/dt$, qui est l'accélération de la particule fluide. Or, celle-ci est nulle, puisque par hypothèse les trajectoires sont rectilignes et le mouvement uniforme. On obtient :

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial x_2}\vec{e}_2 - \rho g\vec{e}_2 + \eta\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2}\vec{e}_1$$

Projetant selon \vec{e}_1 et \vec{e}_2 , on a

$$0 = \eta\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} , \tag{75}$$

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial x_2} - \rho g . \tag{76}$$

Des intégrations directes conduisent à

$$v_1(x_2) = a + bx_2 , \tag{77}$$

$$P(x_2) = -\rho gx_2 + c , \tag{78}$$

avec a, b, c des constantes d'intégration. Ces constantes d'intégration sont déterminées par les conditions aux limites :

$$v_1(0) = 0 , \quad v_1(d) = v_0 , \quad P(d) = P_0 .$$

La première condition donne $a = 0$. La deuxième implique alors $bd = v_0$, donc $b = v_0/d$. La troisième implique $-\rho gd + c = P_0$, donc $c = P_0 + \rho gd$. La solution s'écrit donc :

$$\boxed{\vec{v} = \frac{v_0}{d}x_2\vec{e}_1}$$

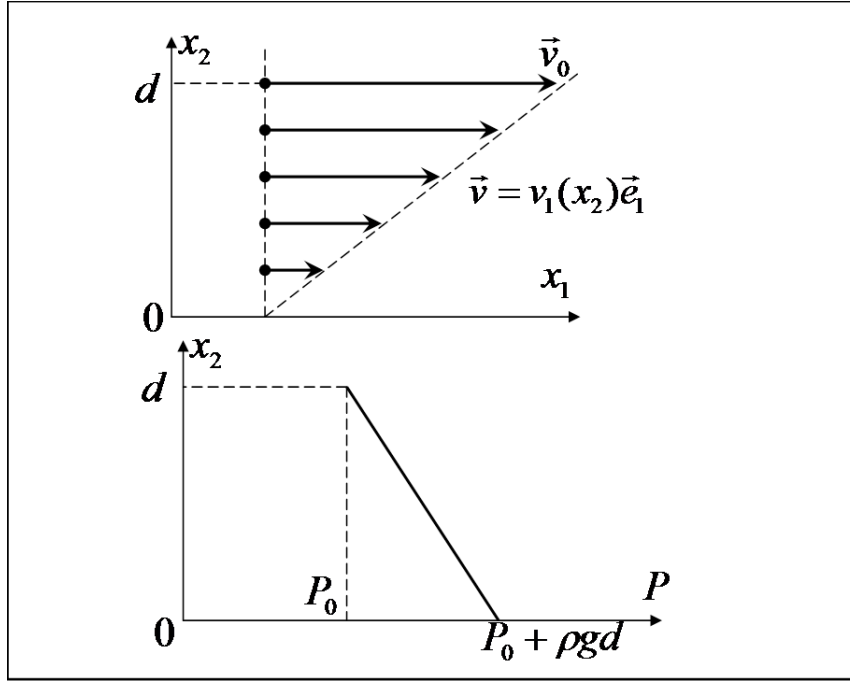


FIG. 20 – Solution stationnaire de Navier-Stokes pour un écoulement entre 2 plaques

$$P = P_0 + \rho g(d - x_2)$$

La solution est esquissée à la Figure 20.

Remarques et énigmes.

- Bien que le mouvement de chaque particule fluide soit rectiligne uniforme, le rotationnel du champ de vitesses n'est pas nul. Voir l'Exemple 1 de la Section 2.6.
- La solution trouvée ne dépend **PAS** de la valeur du coefficient de viscosité η . On pourrait en conclure que l'on peut trouver une solution de (71) en négligeant la viscosité, c'est-à-dire en posant $\eta = 0$. On retrouverait alors l'équation des fluides parfaits d'Euler, Eq.(45). Cela donnerait, dans le cas stationnaire, projeté selon \vec{e}_1 et \vec{e}_2 :

$$0 = 0$$

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial x_2} - \rho g .$$

Il n'y aurait *aucune équation pour $v_1(x_2)$* ! Ce qui veut dire que dans un fluide parfait, n'importe quelle fonction arbitrairement choisie $v_1(x_2)$ satisfait les équations du mouvement. On en conclut que la limite pour une viscosité infinitésimalement petite n'est **PAS** le cas viscosité nulle... En fait, la présence de viscosité, même infinitésimale, change les conditions aux limites et limite le cisaillement du fluide.

- La force de viscosité par unité de volume, $\eta \nabla^2 \vec{v}$, est **NULLE** dans cet écoulement. On en déduit que la résultante des forces de viscosité sur le fluide est nulle... comment alors peut-il y avoir une force sur les plaques, qui était notre point de départ pour introduire la viscosité ? (Voir Section 4.1, Figure 18). On résoudra cette énigme au cours.

Ecoulement de Poiseuille

Un fluide visqueux incompressible de densité ρ s'écoule dans un tube cylindrique de longueur L , rayon R . La pression à l'entrée du tube ($z = 0$) est P_{in} . La pression à la sortie du tube est P_{out} . On aimerait calculer les champs de vitesses et de pression à l'intérieur du tube.

On va chercher une solution stationnaire, négliger la pesanteur, et supposer que la vitesse peut s'écrire :

$$\vec{v} = v_z(r)\vec{e}_z \quad (79)$$

où on a introduit les coordonnées cylindriques (r, φ, z) . Comme dans l'exemple précédent, le mouvement des particules fluides est rectiligne uniforme, donc $d\vec{v}/dt = 0$, et l'équation de Navier-Stokes, Eq.(71), devient

$$0 = -\nabla P + \eta \nabla^2 \vec{v}.$$

Utilisant un formulaire pour les expressions du gradient et du laplacien en coordonnées cylindriques, on a, en projetant selon $\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$:

$$\frac{\partial P}{\partial r} = 0 \quad (80)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \varphi} = 0 \quad (81)$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \eta \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_z}{dr} \right) \quad (82)$$

Les 2 premières équations impliquent que la pression n'est fonction que de z : $P = P(z)$. La troisième équation a donc pour membre de gauche une fonction de z seulement, alors que son membre de droite n'est fonction que de r . La seule possibilité de satisfaire cette équation pour tout r et pour tout z est que les deux membres sont égaux à une constante. Appelons cette constante c . On a donc

$$\frac{\partial P}{\partial z} = c$$

dont la solution est $P(z) = cz + a$, avec a constante d'intégration. Les conditions aux bords $P(0) = P_{in}$ et $P(L) = P_{out}$ impliquent $a = P_{in}$ et $c = -(P_{in} - P_{out})/L$. La solution pour le champ de pression est donc

$$\boxed{P(z) = P_{in} - \frac{P_{in} - P_{out}}{L} z} \quad (83)$$

L'équation pour v_z est :

$$\eta \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_z}{dr} \right) = c.$$

Intégrant une première fois :

$$r \frac{dv_z}{dr} = \frac{1}{2\eta} cr^2 + b,$$

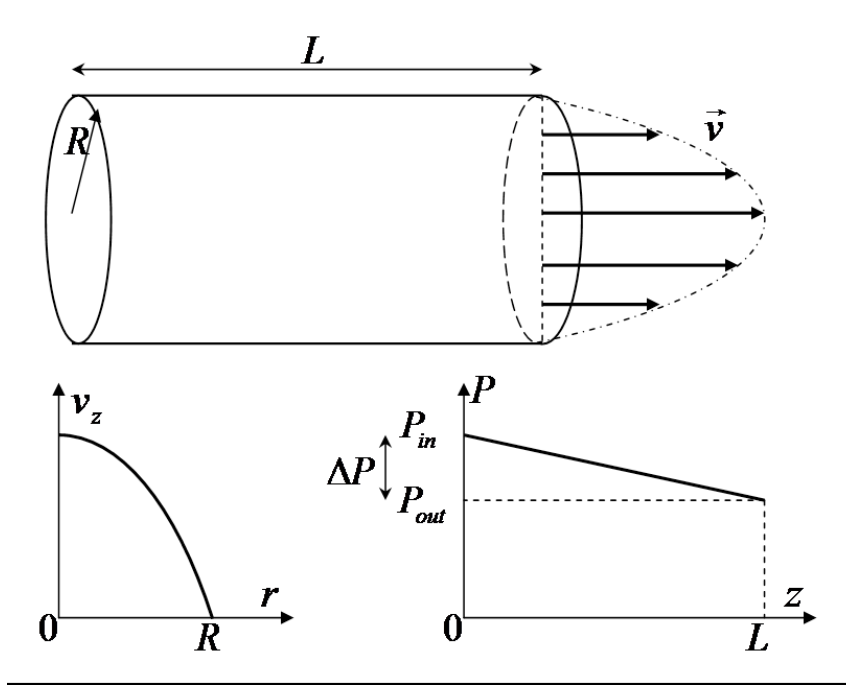


FIG. 21 – *Écoulement de Poiseuille : solution stationnaire de Navier-Stokes pour un écoulement dans un cylindre*

avec b constante d'intégration. Intégrant une deuxième fois :

$$v_z(r) = \frac{1}{4\eta}cr^2 + b \ln r + d ,$$

avec d constante d'intégration. On veut une solution non singulière sur l'axe ($r \rightarrow 0$), donc $b = 0$. La condition au bord du cylindre, $v_z(r = R) = 0$ implique

$$d = -\frac{c}{4\eta}R^2$$

et la solution pour le champ de vitesses est

$$\boxed{v_z(r) = \frac{P_{in} - P_{out}}{4\eta L}(R^2 - r^2)} . \quad (84)$$

La solution pour $P(z)$ et $v_z(r)$ est esquissée à la figure 21. La pression décroît linéairement le long du tube. Le profil des vitesses est parabolique.

A partir de cette solution, on peut calculer le débit volumique D de l'écoulement (m^3/s). Soit $\Delta P = P_{in} - P_{out}$ la chute de pression dans le tube.

$$D = \int_0^r \int_0^{2\pi} v_z(r)rdrd\theta = \int_0^r 2\pi \frac{\Delta P}{4\eta L}(R^2 - r^2)rdr = \frac{\Delta P}{\eta L} \frac{\pi}{8} R^4$$

Cette expression donne le débit volumique pour une chute de pression donnée dans un tube de longueur L , rayon R . En résolvant pour ΔP , on obtient

$$\boxed{\Delta P = \frac{8\eta L D}{\pi R^4}} , \quad (85)$$

appelée **équation de Poiseuille**, qui exprime la chute de pression ΔP dans un tube de longueur L , rayon R , pour un fluide de viscosité η en écoulement stationnaire, en fonction du débit volumique D . ΔP est :

- proportionnel à la viscosité η ,
- proportionnel à la longueur du tube L ,
- proportionnel au débit volumique D ,
- inversement proportionnel à la puissance 4 du rayon R .

5 Similarité et nombre de Reynolds

5.1 Introduction

On constate que, mis à part les quelques cas que l'on peut résoudre analytiquement, par exemple l'écoulement de Poiseuille de la section 4.2, il est très difficile de résoudre les équations du mouvement du fluide de Navier-Stokes, Eq.(71).

L'idée est que "la nature va résoudre les équations de Navier-Stokes pour nous".

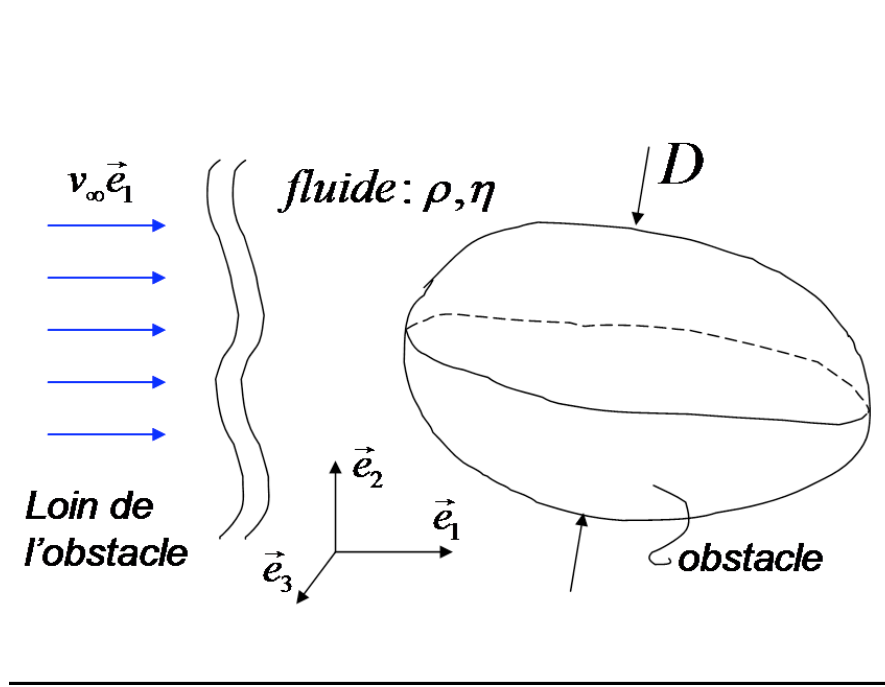
Le but est de faire des essais d'aérodynamique ou d'hydrodynamique avec des **modèles réduits**. Par exemple, il peut s'agir d'une maquette d'avion dans un tunnel d'essais aérodynamique. On aimerait connaître l'écoulement de l'air, et aussi quelle sera la résultante des forces exercées par l'air sur l'avion (portance, traînée).

La question est : comment se rapporter au cas grandeur nature ? Comment l'écoulement autour du modèle réduit peut-il me renseigner sur l'écoulement autour du modèle en grandeur nature ?

Le cadre de ce qui suit est l'étude des écoulements d'un fluide visqueux incompressible autour d'un obstacle solide fixe de forme donnée et d'orientation donnée (Figure 22). Les paramètres de cet écoulement sont : v_∞ , la vitesse du fluide loin de l'obstacle ; ρ , η , la densité et la viscosité du fluide ; D la taille (p.ex. le diamètre) de l'objet, sa forme et son orientation. Soit 4 paramètres, en plus de la forme et de l'orientation.

5.2 Equations normalisées et nombre de Reynolds

Dans cette section, on démontre que l'on peut écrire les équations de Navier-Stokes, dans des unités bien choisies, où n'apparaît qu' **un seul paramètre**. La méthode est d'utiliser des unités sans dimension, c'est-à-dire de **renormaliser**. La première étape est de partir


 FIG. 22 – *Ecoulement autour d'un obstacle. Paramètres : v_∞ , ρ , η , D , forme, orientation.*

de l'équation de Navier-Stokes, Eq.(71), divisant par ρ :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \frac{\eta}{\rho}\nabla^2\vec{v} \quad (86)$$

Le rapport η/ρ s'appelle **viscosité spécifique**.

| Substance | $\eta[kg\ m^{-1}s^{-1}]$ | $\eta/\rho[m^2s^{-1}]$ |
|-----------|--------------------------|------------------------|
| eau | 10^{-3} | 10^{-6} |
| air | 1.8×10^{-5} | 1.5×10^{-5} |
| glycérine | 0.85 | 6.8×10^{-4} |

On utilise l'identité vectorielle Eq.(62) pour écrire le membre de gauche de l'équation (86) :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\nabla \times \vec{v}) \times \vec{v} + \frac{1}{2}\nabla v^2$$

Prenons le rotationnel de l'équation (86). On rappelle la définition du vecteur tourbillon $\vec{T} = \nabla \times \vec{v}$ (Section 2.6). On obtient, utilisant l'identité $\nabla \times \nabla f = 0$ pour tout champ scalaire f :

$$\boxed{\frac{\partial\vec{T}}{\partial t} + \nabla \times (\vec{T} \times \vec{v}) = \frac{\eta}{\rho}\nabla^2\vec{T}} \quad (87)$$

On rappelle les conditions aux limites :

$$\boxed{\vec{v} = 0} \quad (88)$$

à la surface de l'objet, et

$$\boxed{\lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} \vec{v} = v_\infty \vec{e}_1} \quad (89)$$

Définissons les unités suivantes :

- D , unité de longueur,
- D/v_∞ , unité de temps, et
- ρD^3 , unité de masse.

On en déduit ainsi que

- v_∞ est l'unité de vitesse.

Définissons des grandeurs normalisées \vec{x}', \vec{v}', t' , telles que

$$\boxed{\vec{x} = \vec{x}' D, \quad \vec{v} = \vec{v}' v_\infty \quad t = t' \frac{D}{v_\infty}}. \quad (90)$$

Ce sont des grandeurs dont les unités sont sans dimensions. Réécrivons l'Eq.(87). On a

$$\nabla = \frac{1}{D} \nabla', \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{v_\infty}{D} \frac{\partial}{\partial t'}, \quad \vec{T} = \nabla \times \vec{v} = \frac{1}{D} \nabla' \times \vec{v}' v_\infty = \frac{v_\infty}{D} \vec{T}' \Rightarrow \frac{\partial \vec{T}}{\partial t} = \frac{v_\infty^2}{D^2} \frac{\partial \vec{T}'}{\partial t'} ;$$

$$\nabla \times (\vec{T} \times \vec{v}) = \frac{1}{D} \frac{v_\infty}{D} v_\infty \nabla' \times (\vec{T}' \times \vec{v}') = \frac{v_\infty^2}{D^2} \nabla' \times (\vec{T}' \times \vec{v}') ;$$

$$\nabla^2 \vec{T} = \frac{1}{D^2} \frac{v_\infty}{D} \nabla'^2 \vec{T}' = \frac{v_\infty}{D^3} \nabla'^2 \vec{T}'$$

Substituant dans l'Eq.(87), il vient, simplifiant par v_∞^2/D^2 ,

$$\boxed{\frac{\partial \vec{T}'}{\partial t'} + \nabla' \times (\vec{T}' \times \vec{v}') = \frac{\eta}{\rho D v_\infty} \nabla'^2 \vec{T}'}. \quad (91)$$

Les conditions aux limites, pour ces champs normalisés, sont

$$\boxed{\vec{v}' = 0} \quad (92)$$

à la surface de l'objet, et

$$\boxed{\lim_{|\vec{x}'| \rightarrow \infty} \vec{v}' = \vec{e}_1}. \quad (93)$$

Les équations pour les champs normalisés, Eqs.(91- 93), ne dépendent donc que d'un seul paramètre, sans dimensions, appelé nombre de Reynolds :

$$\boxed{\mathcal{R} = \frac{\rho D v_\infty}{\eta}}. \quad (94)$$

N.B. : Vérifiez que \mathcal{R} est un nombre sans dimensions.

5.3 Écoulements similaires. Essais en tunnel aéro-/hydro-dynamique

Soit (a) une aile dans un écoulement fluide (“grandeur nature”) et (b) une autre aile, de même forme et orientation, dans un autre écoulement d'un autre fluide (“modèle réduit”). Voir Figure 23. Le cas (a) est caractérisé par les paramètres v_∞^a , D^a , η^a et ρ^a . Le cas (b)

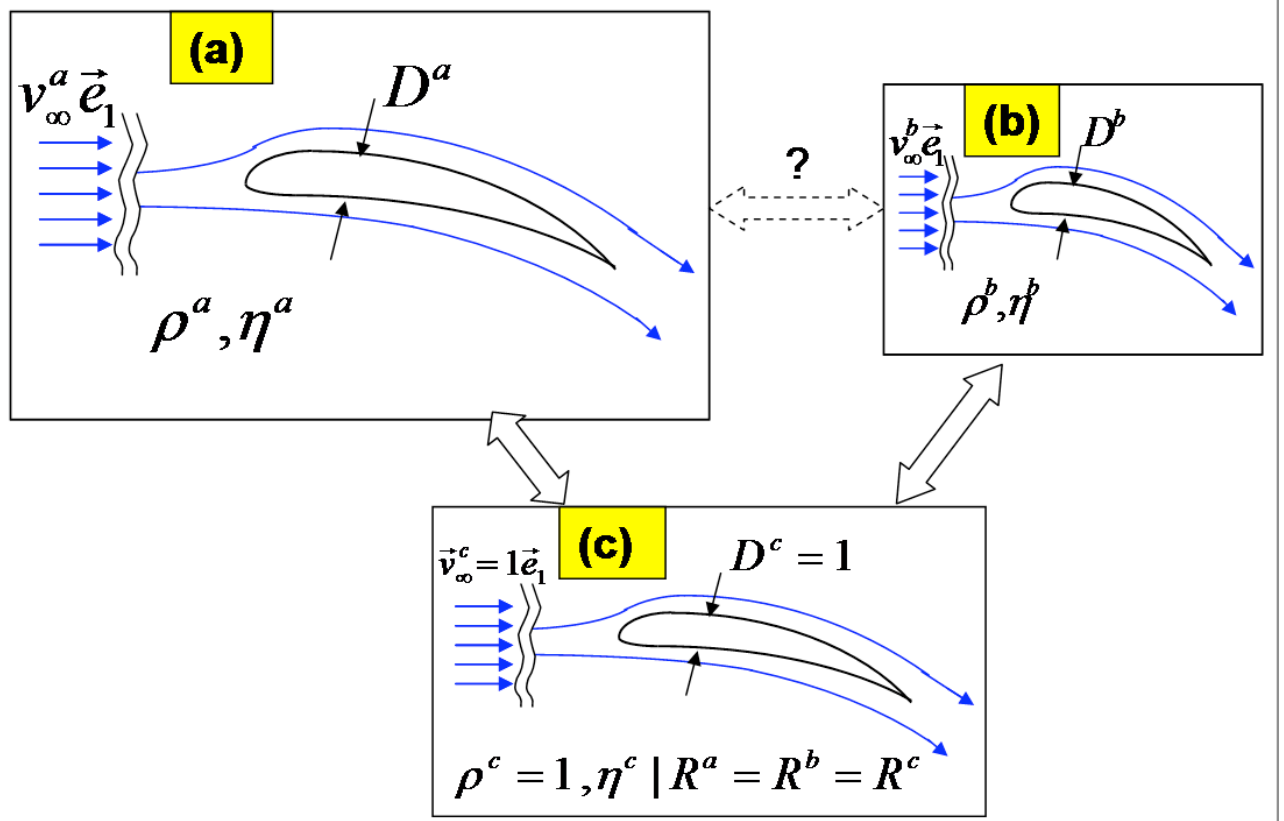


FIG. 23 – Écoulement (a) autour d’une aile “grandeur nature”. (b) Écoulement autour d’une aile “modèle réduit”. (c) Écoulement dans l’espace normalisé. Les écoulements sont similaires s’ils ont le même nombre de Reynolds.

est caractérisé par les paramètres v_∞^b , D^b , η^b et ρ^b . Soit \mathcal{R}^a le nombre de Reynolds de l'écoulement "grandeur nature" :

Si on choisit les paramètres de la simulation (b) ("modèle réduit") de telle sorte qu'il ait le même nombre de Reynolds que l'écoulement (a) ("grandeur nature"),

$$\boxed{\mathcal{R}^b = \mathcal{R}^a} \Leftrightarrow \boxed{\frac{\rho^b D^b v_\infty^b}{\eta^b} = \frac{\rho^a D^a v_\infty^a}{\eta^a}}, \quad (95)$$

alors les écoulements (a) et (b) sont **similaires**, c'est-à-dire qu'une fois obtenu l'un, on peut obtenir l'autre par des facteurs d'échelle. Plus précisément :

Soient \vec{x}^a , \vec{x}^b tels que

$$\frac{\vec{x}^a}{D^a} = \frac{\vec{x}^b}{D^b}.$$

Soient t^a , t^b tels que

$$\frac{t^a}{D^a/v_\infty^a} = \frac{t^b}{D^b/v_\infty^b}.$$

Alors

$$\boxed{\frac{\vec{v}^a}{v_\infty^a} = \frac{\vec{v}^b}{v_\infty^b}}. \quad (96)$$

En effet, on a montré à la section précédente que ces écoulements, ayant le même nombre de Reynolds (94), sont décrits par la même équation (91) dans les grandeurs normalisées. Les 2 écoulements (a) et (b) ont ainsi la même représentation normalisée (c), Figure 23.

En particulier, les lignes de courant seront les mêmes (au facteur de proportionnalité D^a/D^b près). Une photographie (instantané) des lignes de courant de l'écoulement (b) est identique à celle de l'écoulement (a).

Supposons que l'on mesure une force \vec{F}^b exercée par le fluide (b) sur l'obstacle "modèle réduit". C'est par exemple les forces de portance et de traînée sur une aile, voir **expérience du cours**. Quelle est la force que l'on prédit pour \vec{F}^a pour le cas (a) "grandeur nature" ?

Il suffit de considérer les unités pour la force. Dans le système MKSA, il s'agit de Newton, donc de $kg\ m\ s^{-2}$, autrement dit masse \times longueur \times (temps) $^{-2}$. L'unité pour la force est donc $(\rho D^3) \times (D) \times (D/v_\infty)^{-2} = \rho v_\infty^2 D^2$. La force, mesurée dans les unités normalisées, sera donc

$$\vec{F}^{nb} = \frac{1}{\rho^b (v_\infty^b)^2 (D^b)^2} \vec{F}^b$$

Or, les écoulements (a) et (b) étant similaires, on a la même force normalisée :

$$\vec{F}^{na} = \vec{F}^{nb} \Leftrightarrow \frac{1}{\rho^a (v_\infty^a)^2 (D^a)^2} \vec{F}^a = \frac{1}{\rho^b (v_\infty^b)^2 (D^b)^2} \vec{F}^b$$

et donc

$$\boxed{\vec{F}^a = \frac{\rho^a (v_\infty^a)^2 (D^a)^2}{\rho^b (v_\infty^b)^2 (D^b)^2} \vec{F}^b}. \quad (97)$$

Cette équation exprime la force prédite pour le cas “grandeur nature”, \vec{F}^a , en fonction de la force mesurée sur le modèle réduit, \vec{F}^b , et des paramètres des deux écoulements. Attention, ceci est vrai **pour autant que les deux écoulements aient le même nombre de Reynolds !**

La force normalisée \vec{F}' ne dépend que

- du nombre de Reynolds \mathcal{R}
- de la forme de l’obstacle (aile, etc)
- de l’orientation de l’obstacle par rapport à \vec{v}_∞

On peut donc écrire

$$\vec{F} = \rho v_\infty^2 D^2 \vec{F}'(\mathcal{R}, \text{forme}, \text{orientation})$$

Traditionnellement, on prend un plan de référence lié à l’obstacle, et on définit $D = \sqrt{S}$, où S est l’aire de la surface de référence (intersection du plan de référence avec l’obstacle). On définit alors l’angle d’incidence i comme l’angle entre \vec{v}_∞ et le plan de référence, et des coefficients de traînée C_x et de portance C_y tels que

$$\boxed{\vec{F} = \frac{1}{2} \rho v_\infty^2 S (C_x(\mathcal{R}, i, \text{forme}) \vec{e}_1 + C_y(\mathcal{R}, i, \text{forme}) \vec{e}_2)} \quad (98)$$

Le but des essais en tunnel aéro-/hydro-dynamique (ou des simulations numériques) est d’obtenir ces coefficients C_x et C_y en fonction des paramètres : nombre de Reynolds \mathcal{R} , angle d’incidence i , et forme de l’objet. Une fois les C_x et C_y connus, les expressions (98) et (97) permettent de prédire quelles seront les forces dans le cas “grandeur nature”.