ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Faculté des Sciences de Base
Section de Physique
Centre de Recherche en Physique des Plasmas
EPFL - CRPP

Jean-Marc Moret

Processus de relaxation et transport classique

Notes de cours donnés dans le cadre de l'École Doctorale en Physique

Mars 2006, 2ème édition

Table des matières

1. Modèle cinétique du plasma

Ce chapitre est basé sur le chapitre 7 de [Krall & Trivelpiece].

La modélisation cinétique du plasma vise à décrire l'état des particules du plasma dans l'espace des vitesses ainsi que l'interaction des particules entre elles ou avec les champs électromagnétiques extérieurs ou produits par les particules elles-mêmes. C'est en général un modèle plus poussé que la description fluide où seules des quantités moyennées sur toutes les particules interviennent, et dans ce sens il constitue une base plus solide pour la dérivation de la description fluide.

Le traitement des interactions entre particules est absolument indispensable si l'on veut aborder les phénomènes de transport au sein d'un plasma. L'interaction entre les particules et le champ électromagnétique doit également être considérée dans les processus d'émission, d'absorption, de diffusion ou de propagation d'ondes à travers le plasma.

Expérimentalement des informations indicatives de l'état du plasma dans l'espace des vitesses sont difficiles à mesurer et le développement de telles méthodes de mesure reste aujourd'hui un défi.

1.1 Description microscopique

Supposons que le plasma que l'on veut modéliser est entièrement ionisé et est composé de N_α particules identiques de type α, N_β particules identiques de type β, etc. La charge des particules du type α est e_α et leur masse m_α, e_β et m_β pour les particules du type β et ainsi de suite. Une description exhaustive de ce plasma et de l'état de ses particules passe par la connaissance de la position $\underline{x}_{\alpha i}(t)$ et de la vitesse $\underline{v}_{\alpha i}(t)$ en tout temps de toutes les particules de type α,et de même pour chaque type. Comme les particules d'un même type ne peuvent pas être distinguées entre elles, on peut résumer l'état du plasma par un ensemble de conditions qui expriment si à la position $\underline{x}$ et la vitesse $\underline{v}$ de l'espace de phase il existe une particule d'un type donné. On pourra écrire par exemple:

$$
\begin{aligned}
F_\alpha(t, \underline{x}, \underline{v}) &\equiv \sum_{i=1}^{N_\alpha} \delta(\underline{x} - \underline{x}_{\alpha i}(t))\delta(\underline{v} - \underline{v}_{\alpha i}(t)) \\
F_\beta(t, \underline{x}, \underline{v}) &\equiv \sum_{i=1}^{N_\beta} \delta(\underline{x} - \underline{x}_{\beta i}(t))\delta(\underline{v} - \underline{v}_{\beta i}(t)) \\
&\dots
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Ainsi la fonction F_α est nulle partout sauf aux endroits où il y a une particule α en position $\underline{x}$ de vitesse $\underline{v}$. Clairement, le nombre total de particules de chaque type est donné par

$$N_\alpha = \int F_\alpha d^3x d^3v$$
$$N_\beta = \int F_{\alpha\beta} d^3x d^3v \tag{2}$$
$$\dots$$

Champs électrique et magnétique

Le champ électrique et magnétique produits par la charge de l'ensemble des particules et du mouvement de cette charge sont donnés par

$$\frac{\partial}{\partial \underline{x}} \cdot \underline{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_\alpha e_\alpha \int F_\alpha d^3v \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial \underline{x}} \times \underline{B} = \mu_0 \sum_\alpha e_\alpha \int \underline{v} F_\alpha d^3v + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \underline{E}}{\partial t} \tag{4}$$

avec les conditions habituelles

$$\frac{\partial}{\partial \underline{x}} \times \underline{E} = -\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \tag{5}$$

$$\frac{\partial}{\partial \underline{x}} \cdot \underline{B} = 0 \tag{6}$$

Approximation de Coulomb

Dans l'approximation de Coulomb on néglige la propagation du champ électro-magnétique, considérant que ceci n'est valable que si elle est beaucoup plus rapide que la vitesse des particules. Ainsi le champ électrique dû aux particules peut être dérivé directement à partir de la distribution de charge qu'elles forment

$$\underline{E}(t, \underline{x}) = -\frac{\partial}{\partial \underline{x}} \sum_\beta \frac{e_\beta}{4\pi\varepsilon_o} \int \frac{F_\beta(t, \underline{x}', \underline{v}')}{|\underline{x} - \underline{x}'|} d^3x' d^3v' \tag{7}$$

De même le champ magnétique se dérive à partir de la densité de courant

$$\underline{B}(t, \underline{x}) = \sum_\beta \frac{\mu_0 e_\beta}{4\pi} \int F_\beta(t, \underline{x}', \underline{v}') \frac{\underline{v}' \times (\underline{x} - \underline{x}')}{|\underline{x} - \underline{x}'|^3} d^3x' d^3v' \tag{8}$$

Equation du mouvement

L'équation du mouvement de chaque particule complète la modélisation du système

$$\frac{d\underline{x}_{\alpha i}}{dt} = \underline{v}_{\alpha i},\ i = 1, \ldots, N_\alpha$$
$$\frac{d\underline{x}_{\beta j}}{dt} = \underline{v}_{\beta j},\ j = 1, \ldots, N_\beta \tag{9}$$
$$\ldots$$

$$\frac{d\underline{v}_{\alpha i}}{dt} = \frac{e_\alpha}{m_\alpha}(\underline{E} + \underline{v}_{\alpha i} \times \underline{B}),\ i = 1, \ldots, N_\alpha$$
$$\frac{d\underline{v}_{\beta j}}{dt} = \frac{e_\beta}{m_\beta}(\underline{E} + \underline{v}_{\beta j} \times \underline{B}),\ j = 1, \ldots, N_\beta \tag{10}$$
$$\ldots$$

Pour être strict la contribution de la i-ème particule de type α, la j-ème particule de type β, etc, dans le calcul des champs intervenant dans l'équation de Newton ne devrait pas être prise en compte mais dans le cas où le nombre de particules est élevé ce détail peut être omis.

Evolution temporelle du système

L'évolution dans le temps du système est caractérisée par la dérivé temporelle des fonctions descriptives $F_\alpha, F_\beta, \ldots$ qui peut être dérivée en introduisant les équations du mouvement.

Problème 1. Calculer la dérivé par rapport au temps $\partial F_\alpha / \partial t$ à partir de la définition de F_α et en y introduisant les équations du mouvement des particules.

En partant de la définition de F_α on peut écrire

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial t} = \sum_{i=1}^{N_\alpha} \frac{\partial}{\partial t}(\delta(\underline{x} - \underline{x}_{\alpha i}(t))\delta(\underline{v} - \underline{v}_{\alpha i}(t))) \tag{11}$$

La dépendance temporelle intervient à travers les paramètres $\underline{x}_{\alpha i}(t)$ et $\underline{v}_{\alpha i}(t)$ ce qui permet d'effectuer la dérivé partielle

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial t} = \sum_{i=1}^{N_\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial \underline{x}}\delta(\underline{x} - \underline{x}_{\alpha i}(t)) \cdot \left(-\frac{d\underline{x}_{\alpha i}}{dt}\right)\delta(\underline{v} - \underline{v}_{\alpha i}(t)) \right. \tag{12}$$
$$\left. + \delta(\underline{x} - \underline{x}_{\alpha i}(t))\frac{\partial}{\partial \underline{v}}\delta(\underline{v} - \underline{v}_{\alpha i}(t)) \cdot \left(-\frac{d\underline{v}_{\alpha i}}{dt}\right) \right)$$

Ensuite les équations du mouvement pour chaque particule peut être substituée à $d\underline{x}_{\alpha i}/dt$ et $d\underline{v}_{\alpha i}/dt$

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial t} \tag{13}$$

$$= \sum_{i=1}^{N_\alpha}\left(-\frac{\partial}{\partial \underline{x}}\delta(\underline{x}-\underline{x}_{\alpha i})\cdot \underline{v}_{\alpha i}\delta(\underline{v}-\underline{v}_{\alpha i}) - \delta(\underline{x}-\underline{x}_{\alpha i})\frac{\partial}{\partial \underline{v}}\delta(\underline{v}-\underline{v}_{\alpha i})\right.$$

$$\left.\cdot\frac{e_\alpha}{m_\alpha}(\underline{E}+\underline{v}_{\alpha i}\times\underline{B})\right)$$

En notant que

$$\underline{v}_{\alpha i}\delta(\underline{v}-\underline{v}_{\alpha i}) = \underline{v}\delta(\underline{v}-\underline{v}_{\alpha i}) \tag{14}$$

et

$$\frac{\partial}{\partial \underline{v}}\delta(\underline{v}-\underline{v}_{\alpha i})\cdot(\underline{E}+\underline{v}_{\alpha i}\times\underline{B}) = \frac{\partial}{\partial \underline{v}}\delta(\underline{v}-\underline{v}_{\alpha i})\cdot(\underline{E}+\underline{v}\times\underline{B}) \tag{15}$$

on peut écrire

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_\alpha}{\partial t} &= -\underline{v}\cdot\frac{\partial}{\partial \underline{x}}\sum_{i=1}^{N_\alpha}\delta(\underline{x}-\underline{x}_{\alpha i})\delta(\underline{v}-\underline{v}_{\alpha i}) \\ &-\frac{e_\alpha}{m_\alpha}(\underline{E}+\underline{v}\times\underline{B})\cdot\frac{\partial}{\partial \underline{v}}\sum_{i=1}^{N_\alpha}\delta(\underline{x}-\underline{x}_{\alpha i})\delta(\underline{v}-\underline{v}_{\alpha i})\end{aligned} \tag{16}$$

où apparaît clairement par deux fois la définition de F_α

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial t} = -\underline{v}\cdot\frac{\partial}{\partial \underline{x}}F_\alpha - \frac{e_\alpha}{m_\alpha}(\underline{E}+\underline{v}\times\underline{B})\cdot\frac{\partial}{\partial \underline{v}}F_\alpha \tag{17}$$

L'équation d'évolution pour F_α devient donc

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial t} + \underline{v}\cdot\frac{\partial F_\alpha}{\partial \underline{x}} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha}(\underline{E}+\underline{v}\times\underline{B})\cdot\frac{\partial F_\alpha}{\partial \underline{v}} = 0 \tag{18}$$

qui n'exprime que la conservation des particules dans l'espace des vitesses.

2. Description statistique

Après avoir décrit l'état du système de manière complète en termes de positions et vitesses de toutes les particules, on peut adopter une approche statistique en commençant par définir la fonction de probabilité P telle que

$$P(t, \underline{x}_{\alpha 1}, \underline{x}_{\alpha 2}, \ldots, \underline{x}_{\beta 1}, \underline{x}_{\beta 2}, \ldots, \underline{v}_{\alpha 1}, \underline{v}_{\alpha 2}, \ldots, \underline{v}_{\beta 1}, \underline{v}_{\beta 2}, \ldots)$$
$$d^3x_{\alpha 1}d^3x_{\alpha 2}\ldots d^3x_{\beta 1}d^3x_{\beta 2}\ldots d^3v_{\alpha 1}d^3v_{\alpha 2}\ldots d^3v_{\beta 1}d^3v_{\beta 2}\ldots \tag{19}$$

donne la probabilité au temps t que la position et la vitesse de la particule α_1 soient dans un voisinage $d^3x_{\alpha 1}d^3v_{\alpha 1}$ de $\underline{x}_{\alpha 1}$ et $\underline{v}_{\alpha 1}$, et ainsi de suite pour toutes les particules de chaque type. On adoptera la notation suivante pour les listes d'arguments et les éléments de volume

$$\begin{aligned} \underline{x}_{\alpha *} &\equiv \underline{x}_{\alpha 1}, \underline{x}_{\alpha 2}, \ldots \\ \underline{x}_{\beta *} &\equiv \underline{x}_{\beta 1}, \underline{x}_{\beta 2}, \ldots \\ &\ldots \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} \underline{v}_{\alpha *} &\equiv \underline{v}_{\alpha 1}, \underline{v}_{\alpha 2}, \ldots \\ \underline{v}_{\beta *} &\equiv \underline{v}_{\beta 1}, \underline{v}_{\beta 2}, \ldots \\ &\ldots \end{aligned} \tag{21}$$

$$\underline{x}_* = \underline{x}_{\alpha *}, \underline{x}_{\beta *}, \ldots \tag{22}$$

$$\underline{v}_* = \underline{v}_{\alpha *}, \underline{v}_{\beta *}, \ldots \tag{23}$$

$$\begin{aligned} d^3x_{\alpha *} &\equiv d^3x_{\alpha 1}d^3x_{\alpha 2}\ldots = \prod_{i=1}^{N_\alpha} d^3x_{\alpha i} \\ d^3x_{\beta *} &\equiv d^3x_{\beta 1}d^3x_{\beta 2}\ldots = \prod_{j=1}^{N_\beta} d^3x_{\beta j} \\ &\ldots \end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned} d^3v_{\alpha *} &\equiv d^3v_{\alpha 1}d^3v_{\alpha 2}\ldots = \prod_{i=1}^{N_\alpha} d^3v_{\alpha i} \\ d^3v_{\beta *} &\equiv d^3v_{\beta 1}d^3v_{\beta 2}\ldots = \prod_{j=1}^{N_\beta} d^3v_{\beta j} \\ &\ldots \end{aligned} \tag{25}$$

$$d^3x_* \equiv d^3x_{\alpha*}d^3x_{\beta*}\ldots \tag{26}$$

$$d^3v_* \equiv d^3v_{\alpha*}d^3v_{\beta*}\ldots \tag{27}$$

Ceci simplifie l'écriture de

$$\begin{aligned} &P(t, \underline{x}_{\alpha 1}, \underline{x}_{\alpha 2}, \ldots, \underline{x}_{\beta 1}, \underline{x}_{\beta 2}, \ldots, \underline{v}_{\alpha 1}, \underline{v}_{\alpha 2}, \ldots, \underline{v}_{\beta 1}, \underline{v}_{\beta 2}, \ldots) \\ &d^3x_{\alpha 1}d^3x_{\alpha 2}\ldots d^3x_{\beta 1}d^3x_{\beta 2}\ldots d^3v_{\alpha 1}d^3v_{\alpha 2}\ldots d^3v_{\beta 1}d^3v_{\beta 2}\ldots \\ &= P(t, \underline{x}_{\alpha*}, \underline{x}_{\beta*}, \ldots, \underline{v}_{\alpha*}, \underline{v}_{\beta*}, \ldots) = P(t, \underline{x}_*, \underline{v}_*) \end{aligned} \tag{28}$$

En tant que probabilité la normalisation de la fonction P est telle que

$$\int P(t, \underline{x}_*, \underline{v}_*)d^3x_*d^3v_* = 1 \tag{29}$$

2.1 Fonctions de distribution

En soi l'introduction de la fonction de probabilité avec tous ces arguments n'apporte pas de simplification par rapport à la description de l'état de chaque particule individuellement.

Moyenne d'une fonction de l'état du système

Pour réduire la complexité du problème il est possible de moyenner une fonction quelconque de l'état du système sur tous ses états possibles pour obtenir une valeur moyenne indicative. Ainsi pour la fonction quelconque

$$\begin{aligned} &G(t, \underline{x}, \underline{v}, \underline{x}_{\alpha 1}, \underline{x}_{\alpha 2}, \ldots, \underline{x}_{\beta 1}, \underline{x}_{\beta 2}, \ldots \underline{v}_{\alpha 1}, \underline{v}_{\alpha 2}, \ldots, \underline{v}_{\beta 1}, \underline{v}_{\beta 2}, \ldots) \\ &= G(t, \underline{x}, \underline{v}, \underline{x}_*, \underline{v}_*) \end{aligned} \tag{30}$$

on définit sa moyenne

$$\langle G\rangle(t, \underline{x}, \underline{v}) \equiv \int P(t, \underline{x}_*, \underline{v}_*)G(t, \underline{x}, \underline{v}, \underline{x}_*, \underline{v}_*)d^3x_*d^3v_* \tag{31}$$

Fonction de distribution à une particule

Ainsi si la fonction $F_\alpha(t, \underline{x}, \underline{v})$ indique s'il y a une particule α de vitesse $\underline{v}$ au point $\underline{x}$, la quantité $\langle F_\alpha(t, \underline{x}, \underline{v})\rangle d^3xd^3v$ informe sur le nombre de particules que l'on trouvera en moyenne au voisinage d^3xd^3v du point $\underline{x}$ et de la vitesse $\underline{v}$. On définira dans ce sens la fonction de distribution à une particule

$$f_\alpha(t, \underline{x}, \underline{v}) \equiv \langle F_\alpha(t, \underline{x}, \underline{v})\rangle \tag{32}$$

L'expression de cette fonction sur la base de P peut être sensiblement simplifiée en utilisant le fait que toutes les particules de type α sont identiques qui se traduit par le fait que la probabilité de trouver la i-ème particule α en position $\underline{x}$ avec une vitesse $\underline{v}$ et la j-ème partiule α en position $\underline{x}'$ avec une vitesse $\underline{v}'$ est identique à celle de trouver la i-ème particule α en position $\underline{x}'$ avec une vitesse $\underline{v}'$ et la j-ème particule α en position $\underline{x}$ avec une vitesse $\underline{v}$:

$$P(t, \underline{x}_{\alpha 1}, \ldots, \underline{x}_{\alpha i-1}, \underline{x}, \underline{x}_{\alpha i+1}, \ldots, \underline{x}_{\alpha j-1}, \underline{x}', \underline{x}_{\alpha j+1}, \ldots, \underline{v}_{\alpha 1}, \ldots, \underline{v}_{\alpha i-1}, \underline{v}, \underline{v}_{\alpha i+1}, \ldots, \underline{v}_{\alpha j-1}, \underline{v}', \underline{v}_{\alpha j+1}, \ldots) = P(t, \underline{x}_{\alpha 1}, \ldots, \underline{x}_{\alpha i-1}, \underline{x}', \underline{x}_{\alpha i+1}, \ldots, \underline{x}_{\alpha j-1}, \underline{x}, \underline{x}_{\alpha j+1}, \ldots, \underline{v}_{\alpha 1}, \ldots, \underline{v}_{\alpha i-1}, \underline{v}', \underline{v}_{\alpha i+1}, \ldots, \underline{v}_{\alpha j-1}, \underline{v}, \underline{v}_{\alpha j+1}, \ldots) \quad (33)$$

que l'on pourrait noter de manière plus succinte:

$$\begin{aligned} &P(t, \underline{x}_{\alpha i} = \underline{x}, \underline{v}_{\alpha i} = \underline{v}, \underline{x}_{\alpha j} = \underline{x}', \underline{v}_{\alpha j} = \underline{v}') \\ &= P(t, \underline{x}_{\alpha i} = \underline{x}', \underline{v}_{\alpha i} = \underline{v}', \underline{x}_{\alpha j} = \underline{x}, \underline{v}_{\alpha j} = \underline{v}) \end{aligned} \quad (34)$$

Problème 2. Simplifier l'expression de f_α obtenue à partir de sa définition en y introduisant l'identité des particules.

La définition de f_α s'écrit:

$$f_\alpha = \int P \sum_{i=1}^{N_\alpha} \delta(\underline{x} - \underline{x}_{\alpha i}) \delta(\underline{v} - \underline{v}_{\alpha i}) d^3 x_* d^3 v_* \quad (35)$$

ou si la somme est explicitée

$$\begin{aligned} f_\alpha = &\int P \delta(\underline{x} - \underline{x}_{\alpha 1}) \delta(\underline{v} - \underline{v}_{\alpha 1}) d^3 x_* d^3 v_* \\ &+ \int P \delta(\underline{x} - \underline{x}_{\alpha 2}) \delta(\underline{v} - \underline{v}_{\alpha 2}) d^3 x_* d^3 v_* + \ldots \end{aligned} \quad (36)$$

Dans chacun des termes les fonctions de Dirac permettent d'effectuer une partie de l'intégrale, ceci se voit bien si la liste d'argument et l'élément d'intégration sont écrits explicitement

$$
\begin{aligned}
f_\alpha &= \int P(t, \underline{x}_{\alpha 1}, \underline{x}_{\alpha 2}, \ldots, \underline{x}_{\beta 1}, \underline{x}_{\beta 2}, \ldots, \underline{v}_{\alpha 1}, \underline{v}_{\alpha 2}, \ldots, \underline{v}_{\beta 1}, \underline{v}_{\beta 2}, \ldots) \\
&\quad \delta(\underline{x} - \underline{x}_{\alpha 1})\delta(\underline{v} - \underline{v}_{\alpha 1}) d^3x_{\alpha 1} d^3x_{\alpha 2} \ldots d^3x_{\beta 1} d^3x_{\beta 2} \ldots d^3v_{\alpha 1} d^3v_{\alpha 2} \ldots d^3v_{\beta 1} d^3v_{\beta 2} \ldots \\
&\quad + \int P(t, \underline{x}_{\alpha 1}, \underline{x}_{\alpha 2}, \ldots, \underline{x}_{\beta 1}, \underline{x}_{\beta 2}, \ldots, \underline{v}_{\alpha 1}, \underline{v}_{\alpha 2}, \ldots, \underline{v}_{\beta 1}, \underline{v}_{\beta 2}, \ldots) \\
&\quad \delta(\underline{x} - \underline{x}_{\alpha 2})\delta(\underline{v} - \underline{v}_{\alpha 2}) d^3x_{\alpha 1} d^3x_{\alpha 2} \ldots d^3x_{\beta 1} d^3x_{\beta 2} \ldots d^3v_{\alpha 1} d^3v_{\alpha 2} \ldots d^3v_{\beta 1} d^3v_{\beta 2} \ldots + \ldots \\
&= \int P(t, \underline{x}_{\alpha 1} = \underline{x}, \underline{x}_{\alpha 2}, \ldots, \underline{x}_{\beta 1}, \underline{x}_{\beta 2}, \ldots, \underline{v}_{\alpha 1} = \underline{v}, \underline{v}_{\alpha 2}, \ldots, \underline{v}_{\beta 1}, \underline{v}_{\beta 2}, \ldots) d^3x_{\alpha 2} \ldots d^3x_{\beta 1} d^3x_{\beta 2} \ldots d^3v_{\alpha 2} \ldots d^3v_{\beta 1} d^3v_{\beta 2} \ldots \\
&\quad + \int P(t, \underline{x}_{\alpha 1}, \underline{x}_{\alpha 2} = \underline{x}, \ldots, \underline{x}_{\beta 1}, \underline{x}_{\beta 2}, \ldots, \underline{v}_{\alpha 1}, \underline{v}_{\alpha 2} = \underline{v}, \ldots, \underline{v}_{\beta 1}, \underline{v}_{\beta 2}, \ldots) d^3x_{\alpha 1} \ldots d^3x_{\beta 1} d^3x_{\beta 2} \ldots d^3v_{\alpha 1} \ldots d^3v_{\beta 1} d^3v_{\beta 2} \ldots + \ldots
\end{aligned}
\tag{37}
$$

La notation suivante est proposée:

$$
\begin{aligned}
f_\alpha &= \int P(t, \underline{x}_{\alpha 1} = \underline{x}, \underline{v}_{\alpha 1} = \underline{v}) d^3x_{\overline{\alpha 1}} d^3v_{\overline{\alpha 1}} \\
&\quad + \int P(t, \underline{x}_{\alpha 2} = \underline{x}, \underline{v}_{\alpha 2} = \underline{v}) d^3x_{\overline{\alpha 2}} d^3v_{\overline{\alpha 2}} + \ldots
\end{aligned}
\tag{38}
$$

où

$$
\begin{aligned}
d^3x_{\overline{\alpha i}} &= d^3x_{\alpha 1} \ldots d^3x_{\alpha i-1} d^3x_{\alpha i+1} \ldots d^3x_{\beta 1} d^3x_{\beta 2} \ldots \\
d^3v_{\overline{\alpha i}} &= d^3v_{\alpha 1} \ldots d^3v_{\alpha i-1} d^3v_{\alpha i+1} \ldots d^3v_{\beta 1} d^3v_{\beta 2} \ldots
\end{aligned}
\tag{39}
$$

Comme les particules α sont toutes identiques, les deux probabilités suivantes sont égales

$$
P(t, \underline{x}_{\alpha 1} = \underline{x}, \underline{v}_{\alpha 1} = \underline{v}) = P(t, \underline{x}_{\alpha 2} = \underline{x}, \underline{v}_{\alpha 2} = \underline{v}) \tag{40}
$$

et il en est de même pour toutes les contributions individuelles des particules à f_α. Ainsi donc tous les N_α termes de la somme sont identiques et

$$
f_\alpha(t, \underline{x}, \underline{v}) = N_\alpha \int P(t, \underline{x}_{\alpha 1} = \underline{x}, \underline{v}_{\alpha 1} = \underline{v}) d^3x_{\overline{\alpha 1}} d^3v_{\overline{\alpha 1}} \tag{41}
$$

Fonction de distribution à deux particules

Cette fonction f_α possède un nombre de variables réduit et est en conséquence plus simple à manipuler. En contre partie bien sûr elle offre une description moins détaillée de l'ensemble des particules d'un certain type. En particulier cette fonction ne traduit pas les effets des interactions entre particules. Par exemple la probabilité de trouver une particule à la position $\underline{x}$, est clairement influencée par la présence d'une autre particule en $\underline{x}'$, une information qui n'apparaît pas dans f_α. Pour palier à ce manque on définit la fonction de distribution à deux particules par extension de l'expression simplifiée pour celle à une particule

$$f_{\alpha\beta}(t, \underline{x}, \underline{v}, \underline{x}', \underline{v}') \equiv N_\alpha N_\beta \int P(t, \underline{x}_{\alpha 1} = \underline{x}, \underline{x}_{\beta 1} = \underline{x}', \underline{v}_{\alpha 1} = \underline{v}, \underline{v}_{\beta 1} = \underline{v}') \, d^3 x_{\overline{\alpha 1}} d^3 v_{\overline{\alpha 1}} d^3 x_{\overline{\beta 2}} d^3 v_{\overline{\beta 2}} \tag{42}$$

Cette fonction donne la probabilité conjointe de trouver une particule α de vitesse $\underline{v}$ en positon $\underline{x}$ et simultanément une particule β de vitesse $\underline{v}'$ en position $\underline{x}'$. Ces deux particules peuvent être de même type ou d'un type différent. Bien entendu si les deux populations de particules n'interagissent pas entre elles, la fonction de distribution conjointe se factorise

$$f_{\alpha\beta}(t, \underline{x}, \underline{v}, \underline{x}', \underline{v}') = f_\alpha(t, \underline{x}, \underline{v}) f_\beta(t, \underline{x}', \underline{v}') \tag{43}$$

On écrira donc volontiers dans le cas avec interactions

$$f_{\alpha\beta}(t, \underline{x}, \underline{v}, \underline{x}', \underline{v}') = f_\alpha(t, \underline{x}, \underline{v}) f_\beta(t, \underline{x}', \underline{v}') + g_{\alpha\beta}(t, \underline{x}, \underline{v}, \underline{x}', \underline{v}') \tag{44}$$

La fonction $g_{\alpha\beta}$ est appelée fonction de correlaction à deux particules.

Par analogie avec la définition de $f_\alpha \equiv \langle F_\alpha \rangle$ on peut dériver la moyenne du produit F_α et F_β en faisant intervenir leur définition et et la probabilité P.

Problème 3. Simplier l'expression de la moyenne $\langle F_\alpha F_\beta \rangle$ obtenue à partir de la définition de F_α et F_β et celle de la moyenne en utilisant l'identité des particules. Il est commode de distinguer le cas $\alpha \neq \beta$ du cas $\alpha = \beta$, de traiter le premier en premier et de regrouper finalement les deux cas.

Les définitions permettent d'écrire

$$\langle F_\alpha(t, \underline{x}, \underline{v}) F_\beta(t, \underline{x}', \underline{v}') \rangle = \int P \sum_{i=1}^{N_\alpha} \delta(\underline{x} - \underline{x}_{\alpha i}) \delta(\underline{v} - \underline{v}_{\alpha i}) \sum_{j=1}^{N_\beta} \delta(\underline{x}' - \underline{x}_{\beta j}) \delta(\underline{v}' - \underline{v}_{\beta j}) d^3 x_{\alpha *} d^3 v_{\alpha *} d^3 x_{\beta *} d^3 v_{\beta *} \tag{45}$$

Pour $\alpha \neq \beta$ l'intégrale des fonctions de Dirac réduit l'expression à

$$\langle F_\alpha F_{\beta \neq \alpha} \rangle \tag{46}$$
$$= \int \sum_{i=1}^{N_\alpha} \sum_{j=1}^{N_\beta} P(t, \underline{x}_{\alpha i} = \underline{x}, \underline{v}_{\alpha i} = \underline{v}, \underline{x}_{\beta j} = \underline{x}', \underline{v}_{\beta j} = \underline{v}') d^3 x_{\overline{\alpha i}}$$
$$d^3 v_{\overline{\alpha i}} d^3 x_{\overline{\beta j}} d^3 v_{\overline{\beta j}}$$

A nouveau l'identité des particules permet d'affirmer que

$$\begin{aligned} &P(t, \underline{x}_{\alpha i} = \underline{x}, \underline{v}_{\alpha i} = \underline{v}, \underline{x}_{\beta j} = \underline{x}', \underline{v}_{\beta j} = \underline{v}') \\ &= P(t, \underline{x}_{\alpha i'} = \underline{x}, \underline{v}_{\alpha i'} = \underline{v}, \underline{x}_{\beta j'} = \underline{x}', \underline{v}_{\beta j'} = \underline{v}') \end{aligned} \tag{47}$$

et tous les $N_\alpha N_\beta$ termes de la somme sont identiques. Ainsi pour $\alpha \neq \beta$

$$\begin{aligned} &\langle F_\alpha F_{\beta \neq \alpha} \rangle = N_\alpha N_\beta \\ &\int P(t, \underline{x}_{\alpha 1} = \underline{x}, \underline{v}_{\alpha 1} = \underline{v}, \underline{x}_{\beta 1} = \underline{x}', \underline{v}_{\beta 1} = \underline{v}') \\ &d^3 x_{\overline{\alpha 1}} d^3 v_{\overline{\alpha 1}} d^3 x_{\overline{\beta 1}} d^3 v_{\overline{\beta 1}} \end{aligned} \tag{48}$$

qui coïncide avec la définition de $f_{\alpha\beta}$.

Pour un type de particules identiques, le calcul est le suivant

$$\langle F_\alpha F_\alpha \rangle \tag{49}$$
$$= \sum_{i=1}^{N_\alpha} \sum_{j=1, j \neq i}^{N_\alpha} \int P \delta(\underline{x} - \underline{x}_{\alpha i}) \delta(\underline{v} - \underline{v}_{\alpha i}) \delta(\underline{x}' - \underline{x}_{\alpha j}) \delta(\underline{v}' - \underline{v}_{\alpha j}) d^3 x_{\alpha *} d^3 v_{\alpha *}$$
$$+ \sum_{i=1}^{N_\alpha} \int P \delta(\underline{x} - \underline{x}_{\alpha i}) \delta(\underline{v} - \underline{v}_{\alpha i}) \delta(\underline{x}' - \underline{x}_{\alpha i}) \delta(\underline{v}' - \underline{v}_{\alpha i}) d^3 x_{\alpha *} d^3 v_{\alpha *}$$

Comme auparavant tous les termes de la double somme après intégration apparaissent identiques en suivant l'argument de l'identité des particules. Quand au deuxième terme fait de la simple somme on remarque que dans l'intégrant

$$\delta(\underline{x} - \underline{x}_{\alpha i}) \delta(\underline{x}' - \underline{x}_{\alpha i}) = \delta(\underline{x} - \underline{x}_{\alpha i}) \delta(\underline{x} - \underline{x}') \tag{50}$$

et

$$\delta(\underline{v}-\underline{v}_{\alpha i})\delta(\underline{v}'-\underline{v}_{\alpha i}) = \delta(\underline{v}-\underline{v}_{\alpha i})\delta(\underline{v}-\underline{v}') \tag{51}$$

si bien que

$$\langle F_\alpha F_\alpha \rangle = N_\alpha(N_\alpha - 1) \tag{52}$$

$$\int P(t, \underline{x}_{\alpha 1} = \underline{x}, \underline{v}_{\alpha 1} = \underline{v}, \underline{x}_{\alpha 2} = \underline{x}', \underline{v}_{\alpha 2} = \underline{v}')$$

$$d^3 x_{\overline{\alpha 1}} d^3 v_{\overline{\alpha 1}} d^3 x_{\overline{\alpha 2}} d^3 v_{\overline{\alpha 2}}$$

$$+ \delta(\underline{x}-\underline{x}')\delta(\underline{v}-\underline{v}') \sum_{i=1}^{N_\alpha} \int P\delta(\underline{x}-\underline{x}_{\alpha i})\delta(\underline{v}-\underline{v}_{\alpha i}) d^3 x_{\alpha *} d^3 v_{\alpha *}$$

qui laisse apparaître dans le premier terme l'expression de $f_{\alpha\alpha}$ et dans le deuxième terme la définition de f_α

$$\langle F_\alpha(t, \underline{x}, \underline{v}) F_\alpha(t, \underline{x}', \underline{v}') \rangle = N_\alpha(N_\alpha - 1)\frac{f_{\alpha\alpha}}{N_\alpha^2} + \delta(\underline{x}-\underline{x}')\delta(\underline{v}-\underline{v}') f_\alpha \tag{53}$$

On peut généraliser en combinant les deux cas

$$\begin{aligned} \langle F_\alpha(t, \underline{x}, \underline{v}) F_\beta(t, \underline{x}', \underline{v}') \rangle &= f_{\alpha\beta}(t, \underline{x}, \underline{v}, \underline{x}', \underline{v}') \\ &+ \delta_{\alpha\beta}(\delta(\underline{x}-\underline{x}')\delta(\underline{v}-\underline{v}') f_\alpha(t, \underline{x}, \underline{v}) - N_\alpha^{-1} f_{\alpha\beta}(t, \underline{x}, \underline{v}, \underline{x}', \underline{v}')) \end{aligned} \tag{54}$$

Le dernier terme proportionnel à N_α^{-1} est négligeable par rapport au premier en présence d'un grand nombre de particules.

2.2 Equation de Fokker-Planck

Evolution temporelle de la fonction de distribution

La prochaine étape consiste à dériver une équation d'évolution temporelle pour f_α. Comme f_α est définie comme la moyenne de F_α, la moyenne de l'équation régissant l'évolution temporelle de F_α servira de point de départ.

$$\langle \frac{\partial F_\alpha}{\partial t} \rangle + \underline{v} \cdot \langle \frac{\partial F_\alpha}{\partial \underline{x}} \rangle + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \langle (\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B}) \cdot \frac{\partial F_\alpha}{\partial \underline{v}} \rangle = 0 \tag{55}$$

Le premier et deuxième termes sont respectivement $\partial f_\alpha / \partial t$ et $\underline{v} \cdot \partial f_\alpha / \partial \underline{x}$, ce qui découle directement de la définition de f_α.

Termes d'interactions entre particules

Comme le calcul des champs électriques et magnétiques fait intervenir les fonctions F_β, on se rend compte que le dernier terme du membre de gauche fait apparaître des fonctions de distribution à deux particules et ceci par les interactions entre particules à travers le champ qu'elles produisent.

Le terme lié au champ électrique se développe comme suit en utilisant l'approximation de Coulomb

$$\langle \underline{E} \cdot \frac{\partial F_\alpha}{\partial \underline{v}} \rangle \tag{56}$$

$$= -\int P(t, \underline{x}_*, \underline{v}_*) \frac{\partial}{\partial \underline{x}}\left(\sum_\beta \frac{e_\beta}{4\pi\varepsilon_o} \int \frac{F_\beta(t, \underline{x}', \underline{v}', \underline{x}_{\beta *}, \underline{v}_{\beta *})}{|\underline{x} - \underline{x}'|} d^3x' d^3v' \right)$$

$$\cdot \frac{\partial F_\alpha(t, \underline{x}, \underline{v}, \underline{x}_{\alpha *}, \underline{v}_{\alpha *})}{\partial \underline{v}} d^3x_* d^3v_*$$

On constate que les seuls facteurs dépendant des variables $\underline{x}_*$ et $\underline{v}_*$ sont P, F_β et $\partial F_\alpha / \partial \underline{v}$, ce qui permet de regrouper les facteurs de l'intégrant

$$\langle \underline{E} \cdot \frac{\partial F_\alpha}{\partial \underline{v}} \rangle = -\sum_\beta \frac{e_\beta}{4\pi\varepsilon_o} \int \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \frac{1}{|\underline{x} - \underline{x}'|} \cdot \left(\int P(t, \underline{x}_*, \underline{v}_*) \right. \tag{57}$$

$$\left. F_\beta(t, \underline{x}', \underline{v}', \underline{x}_{\beta *}, \underline{v}_{\beta *}) \frac{\partial F_\alpha(t, \underline{x}, \underline{v}, \underline{x}_{\alpha *}, \underline{v}_{\alpha *})}{\partial \underline{v}} d^3x_* d^3v_* \right) d^3x' d^3v'$$

et que parmi ceux-ci seul F_α dépend de $\underline{v}$ si bien que

$$\langle \underline{E} \cdot \frac{\partial F_\alpha}{\partial \underline{v}} \rangle = -\sum_\beta \frac{e_\beta}{4\pi\varepsilon_o} \int \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \frac{1}{|\underline{x} - \underline{x}'|} \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{v}} \left(\int P F_\beta F_\alpha d^3x_* d^3v_* \right) d^3x' d^3v' \tag{58}$$

ce qui fait apparaître $\langle F_\alpha F_\beta \rangle = \int P F_\beta F_\alpha d^3x_* d^3v_*$ dont on a déjà calculé l'expression en termes de f_α, f_β et $f_{\alpha\beta}$

$$\langle F_\alpha F_\beta \rangle = f_{\alpha\beta} + \delta_{\alpha\beta} \delta(\underline{x} - \underline{x}') \delta(\underline{v} - \underline{v}') f_\alpha \tag{59}$$

En regroupant les facteurs de l'intégrant dépendant de $\underline{x}'$ on obtient

$$\langle \underline{E} \cdot \frac{\partial F_\alpha}{\partial \underline{v}} \rangle = -\sum_\beta \frac{e_\beta}{4\pi\varepsilon_o} \int \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \frac{1}{|\underline{x} - \underline{x}'|} \cdot \frac{\partial f_{\alpha\beta}}{\partial \underline{v}} d^3x' d^3v' \tag{60}$$

$$- \frac{e_\alpha}{4\pi\varepsilon_o} \int \frac{\partial}{\partial \underline{v}} (\delta(\underline{v} - \underline{v}') f_\alpha) \cdot \left(\int \delta(\underline{x} - \underline{x}') \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \frac{1}{|\underline{x} - \underline{x}'|} d^3x' \right) d^3v'$$

Le deuxième terme est nul car

$$\int \delta(\underline{x}) \frac{\partial x^{-1}}{\partial \underline{x}} d^3 x = -\int \delta(\underline{x}) \underline{x} x^{-3} d^3 x = 0 \qquad (61)$$

ceci en vertu de la parité de l'intégrant

$$\delta(-\underline{x})(-\underline{x}) \|-\underline{x}\|^{-3} = -\delta(\underline{x}) \underline{x} \|\underline{x}\|^{-3} \qquad (62)$$

Quand au premier terme on introduira

$$f_{\alpha\beta}(t, \underline{x}, \underline{v}, \underline{x}', \underline{v}') = f_{\alpha}(t, \underline{x}, \underline{v}) f_{\beta}(t, \underline{x}', \underline{v}') + g_{\alpha\beta}(t, \underline{x}, \underline{v}, \underline{x}', \underline{v}') \qquad (63)$$

En conséquence

$$\frac{\partial f_{\alpha\beta}(t, \underline{x}, \underline{v}, \underline{x}', \underline{v}')}{\partial \underline{v}} = \frac{\partial f_{\alpha}(t, \underline{x}, \underline{v})}{\partial \underline{v}} f_{\beta}(t, \underline{x}', \underline{v}') + \frac{\partial g_{\alpha\beta}(t, \underline{x}, \underline{v}, \underline{x}', \underline{v}')}{\partial \underline{v}} \qquad (64)$$

et donc

$$\langle \underline{E} \cdot \frac{\partial F_{\alpha}}{\partial \underline{v}} \rangle = -\sum_{\beta} \frac{e_{\beta}}{4\pi\varepsilon_o} \int f_{\beta} \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \frac{1}{|\underline{x} - \underline{x}'|} d^3 x' d^3 v' \cdot \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \underline{v}} \qquad (65)$$
$$- \sum_{\beta} \frac{e_{\beta}}{4\pi\varepsilon_o} \int \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \frac{1}{|\underline{x} - \underline{x}'|} \cdot \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \underline{v}} d^3 x' d^3 v'$$

Le premier terme est $\langle \underline{E} \rangle \cdot \partial f_{\alpha} / \partial \underline{v}$. Le deuxième terme contient l'effet des interactions entre particules à travers leur champ électrique.

Le terme lié au champ magnétique se transforme de la même manière.

Problème 4. Dériver le terme lié au champ magnétique $\langle \underline{v} \times \underline{B} \cdot \partial F_{\alpha} / \partial \underline{v} \rangle$ dans l'équation d'évolution pour f_{α} en suivant les mêmes étapes que pour le terme lié au champ électrique.

Le terme lié au champ magnétique se développe comme suit en utilisant l'approximation de Coulomb

$$\langle \underline{v} \times \underline{B} \cdot \frac{\partial F_\alpha}{\partial \underline{v}} \rangle = \int P(t, \underline{x}_*, \underline{v}_*) \tag{66}$$
$$\frac{\partial}{\partial \underline{x}}\left(\sum_\beta \frac{\mu_o e_\beta}{4\pi} \int F_\beta(t, \underline{x}', \underline{v}', \underline{x}_{\beta *}, \underline{v}_{\beta *}) \frac{\underline{v}' \times (\underline{x} - \underline{x}')}{|\underline{x} - \underline{x}'|^3} d^3x' d^3v' \right)$$
$$\cdot \frac{\partial F_\alpha(t, \underline{x}, \underline{v}, \underline{x}_{\alpha *}, \underline{v}_{\alpha *})}{\partial \underline{v}} d^3x_* d^3v_*$$

On constate qu'ici aussi les seuls facteurs dépendant des variables $\underline{x}_*$ et $\underline{v}_*$ sont P, F_β et $\partial F_\alpha / \partial \underline{v}$, ce qui permet de regrouper les facteurs de l'intégrant

$$\langle \underline{v} \times \underline{B} \cdot \frac{\partial F_\alpha}{\partial \underline{v}} \rangle = \sum_\beta \frac{\mu_o e_\beta}{4\pi} \int \frac{\underline{v}' \times (\underline{x} - \underline{x}')}{|\underline{x} - \underline{x}'|^3} \cdot \left(\int P(t, \underline{x}_*, \underline{v}_*) \right. \tag{67}$$
$$\left. F_\beta(t, \underline{x}', \underline{v}', \underline{x}_{\beta *}, \underline{v}_{\beta *}) \frac{\partial F_\alpha(t, \underline{x}, \underline{v}, \underline{x}_{\alpha *}, \underline{v}_{\alpha *})}{\partial \underline{v}} d^3x_* d^3v_* \right) d^3x' d^3v'$$

et que parmi ceux-ci seul F_α dépend de $\underline{v}$ si bien que

$$\langle \underline{v} \times \underline{B} \cdot \frac{\partial F_\alpha}{\partial \underline{v}} \rangle \tag{68}$$
$$= \sum_\beta \frac{\mu_o e_\beta}{4\pi} \int \frac{\underline{v}' \times (\underline{x} - \underline{x}')}{|\underline{x} - \underline{x}'|^3} \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{v}} \left(\int P F_\beta F_\alpha d^3x_* d^3v_* \right) d^3x' d^3v'$$

ce qui fait apparaître $\langle F_\alpha F_\beta \rangle = \int P F_\beta F_\alpha d^3x_* d^3v_*$ dont on a déjà calculé l'expression en termes de f_α, f_β et $f_{\alpha\beta}$

$$\langle F_\alpha F_\beta \rangle = f_{\alpha\beta} + \delta_{\alpha\beta} \delta(\underline{x} - \underline{x}') \delta(\underline{v} - \underline{v}') f_\alpha \tag{69}$$

En regroupant les facteurs de l'intégrant dépendant de $\underline{x}'$ on obtient

$$\langle \underline{v} \times \underline{B} \cdot \frac{\partial F_\alpha}{\partial \underline{v}} \rangle = \sum_\beta \frac{\mu_o e_\beta}{4\pi} \int \frac{\underline{v}' \times (\underline{x} - \underline{x}')}{|\underline{x} - \underline{x}'|^3} \cdot \frac{\partial f_{\alpha\beta}}{\partial \underline{v}} d^3x' d^3v' \tag{70}$$
$$+ \frac{\mu_o e_\beta}{4\pi} \int \frac{\partial}{\partial \underline{v}} (\delta(\underline{v} - \underline{v}') f_\alpha) \cdot \left(\int \delta(\underline{x} - \underline{x}') \frac{\underline{v}' \times (\underline{x} - \underline{x}')}{|\underline{x} - \underline{x}'|^3} d^3x' \right) d^3v'$$

Le deuxième terme est nul car

$$\int \delta(\underline{x}-\underline{x}')\frac{\underline{v}' \times \underline{x}-\underline{x}'}{|\underline{x}-\underline{x}'|^3}d^3x' = \underline{v}' \times \int \delta(\underline{x}-\underline{x}')\frac{\underline{x}-\underline{x}'}{|\underline{x}-\underline{x}'|^3}d^3x' \tag{71}$$

$$= \underline{v}' \times \int \delta(\underline{x})\frac{\underline{x}}{x^3}d^3x'$$

ceci en vertu de la parité de du même intégrant

$$\delta(-\underline{x})(-\underline{x})\|-\underline{x}\|^{-3} = -\delta(\underline{x})\underline{x}\|\underline{x}\|^{-3} \tag{72}$$

Quand au premier terme on introduira à nouveau

$$f_{\alpha\beta}(t, \underline{x}, \underline{v}, \underline{x}', \underline{v}') = f_\alpha(t, \underline{x}, \underline{v})f_\beta(t, \underline{x}', \underline{v}') + g_{\alpha\beta}(t, \underline{x}, \underline{v}, \underline{x}', \underline{v}') \tag{73}$$

En conséquence

$$\frac{\partial f_{\alpha\beta}(t, \underline{x}, \underline{v}, \underline{x}', \underline{v}')}{\partial \underline{v}} = \frac{\partial f_\alpha(t, \underline{x}, \underline{v})}{\partial \underline{v}}f_\beta(t, \underline{x}', \underline{v}') + \frac{\partial g_{\alpha\beta}(t, \underline{x}, \underline{v}, \underline{x}', \underline{v}')}{\partial \underline{v}} \tag{74}$$

et donc

$$\langle \underline{v} \times \underline{B} \cdot \frac{\partial F_\alpha}{\partial \underline{v}} \rangle = \sum_\beta \frac{\mu_o e_\beta}{4\pi}\int f_\beta \frac{\underline{v}' \times (\underline{x}-\underline{x}')}{|\underline{x}-\underline{x}'|^3}d^3x'd^3v' \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \underline{v}} \tag{75}$$

$$+ \sum_\beta \frac{\mu_o e_\beta}{4\pi}\int \frac{\underline{v}' \times (\underline{x}-\underline{x}')}{|\underline{x}-\underline{x}'|^3} \cdot \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \underline{v}}d^3x'd^3v'$$

Le premier terme est $\langle \underline{E} \rangle \cdot \partial f_\alpha / \partial \underline{v}$. Le deuxième terme contient l'effet des interactions entre particules à travers leur champ électrique.

$$\langle \underline{v} \times \underline{B} \cdot \frac{\partial F_\alpha}{\partial \underline{v}} \rangle \tag{76}$$

$$= \int P\underline{v} \times \sum_\beta \frac{\mu_o e_\beta}{4\pi}\int \frac{\underline{v}' \times (\underline{x}-\underline{x}')}{|\underline{x}-\underline{x}'|^3}d^3x'd^3v' \cdot \frac{\partial F_\alpha}{\partial \underline{v}}d^3x_*d^3v_*$$

$$= \sum_\beta \frac{\mu_o e_\beta}{4\pi}\int \underline{v} \times \frac{\underline{v}' \times (\underline{x}-\underline{x}')}{|\underline{x}-\underline{x}'|^3} \cdot \frac{\partial f_{\alpha\beta}}{\partial \underline{v}}d^3x'd^3v'$$

$$+ \frac{\mu_o e_\alpha}{4\pi}\int \frac{\partial}{\partial \underline{v}}(\delta(\underline{v}-\underline{v}')f_\alpha) \cdot \underline{v}' \times \left(\int \delta(\underline{x}-\underline{x}')\frac{\underline{x}-\underline{x}'}{|\underline{x}-\underline{x}'|^3}d^3x'\right)d^3\underline{v}'$$

où intervient la même intégrale $\int \delta(\underline{x})\underline{x}x^{-3}d^3x = 0$. Donc

$$\langle \underline{v} \times \underline{B} \cdot \frac{\partial F_\alpha}{\partial \underline{v}} \rangle = \underline{v} \times \sum_\beta \frac{\mu_o e_\beta}{4\pi} \int f_\beta \frac{\underline{v}' \times (\underline{x} - \underline{x}')}{|\underline{x} - \underline{x}'|^3} d^3x' d^3v' \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \underline{v}} + \underline{v} \times \sum_\beta \frac{\mu_o e_\beta}{4\pi} \int \frac{\underline{v}' \times (\underline{x} - \underline{x}')}{|x - x'|^3} \cdot \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \underline{v}} d^3x' d^3v' \tag{77}$$

Ici aussi le premier terme est $\underline{v} \times \langle \underline{B} \rangle \cdot \partial f_\alpha / \partial \underline{v}$

$$\langle \underline{v} \times \underline{B} \cdot \frac{\partial F_\alpha}{\partial \underline{v}} \rangle = \underline{v} \times \langle \underline{B} \rangle \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \underline{v}} + \underline{v} \times \sum_\beta \frac{\mu_o e_\beta}{4\pi} \int \frac{\underline{v}' \times (\underline{x} - \underline{x}')}{|\underline{x} - \underline{x}'|^3} \cdot \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \underline{v}} d^3x' d^3v' \tag{78}$$

Le second terme traduit l'effet des interactions entre particules à travers le champ magnétique qu'elles génèrent.

Equation d'évolution temporelle de la fonction de distribution

L'évolution de f_α se résume donc à l'équation dite de Boltzmann

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \underline{v} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \underline{x}} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha}(\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B}) \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \underline{v}} = \sum_\beta C_{\alpha\beta} \tag{79}$$

où l'on a regroupé dans $C_{\alpha\beta}$ tous les effets inclus dans $g_{\alpha\beta}$.

$$C_{\alpha\beta} = -\frac{e_\beta}{4\pi\varepsilon_o} \int \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \frac{1}{|\underline{x} - \underline{x}'|} \cdot \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \underline{v}} d^3x' d^3v' + \underline{v} \times \frac{\mu_o e_\beta}{4\pi} \int \frac{\underline{v}' \times (\underline{x} - \underline{x}')}{|\underline{x} - \underline{x}'|^3} \cdot \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \underline{v}} d^3x' d^3v' = \frac{e_\beta}{4\pi\varepsilon_o} \int \left(\frac{\underline{v} \times \underline{v}' \times (\underline{x} - \underline{x}')}{c^2 |\underline{x} - \underline{x}'|^3} - \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \frac{1}{|\underline{x} - \underline{x}'|} \right) \cdot \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \underline{v}} d^3x' d^3v' \tag{80}$$

Fermeture des équations statistiques

Pour compléter l'équation d'évolution de la fonction de distribution il faudrait donc dériver une équation qui permettrait de calculer $g_{\alpha\beta}$. De manière analogue celle-ci ferait apparaître des interactions à trois particules $g_{\alpha\beta\gamma}$. L'ordre des interactions décroît avec le nombre de particules est on pourrait à partir d'un certain ordre admettre que ces interactions sont négligeables. Alternativement on peut adopter une approche alternative pour calculer l'effet de l'interaction entre les particules.

Equation de Balescu-Lenard

Ce chapitre pourrait être tiré du chapitre 11.1 de [Krall & Trivelpiece].

3. Modèle fluide du plasma

Ce chapitre est basé sur le chapitre 6 de [Miyamoto].

On y développe les équations fondamentales et les relations entre des quantités macroscopiques caractérisant le plasma comme la densité, la vitesse d'écoulement ou la pression, ceci en manipulant l'équation de Boltzmann. Le point commun de toutes ces quantités est qu'elles sont indépendantes de la vitesse de chaque particules et même indépendantes de la distribution de probabilité de ces vitesses représentée par la fonction de distribution. Les effets moyennés des interactions entre les particules sont elles dérivés pour en saisir le rôle.

3.1 Quantités macroscopiques

Pour étudier une quantité macroscopique caractéristique du plasma sans aller dans le détail des fonctions de distribution des particules qui constituent ce plasma, il convient d'effectuer des moyennes sur la vitesse des particules pondérées par le nombre de particules ayant une vitesse donnée. Ainsi à partir d'une fonction générique de la vitesse $g(\underline{v}_\alpha)$ dont on prendra la moyenne pondérée par la fonction de distribution $f(t, \underline{x}, \underline{v})$, on pourra dériver en posant $g = 1$, $g = m_\alpha \underline{v}_\alpha$ ou $g = m_\alpha v_\alpha^2 / 2$ successivement la densité, l'impulsion ou l'énergie cinétique du plasma.

Définition d'une quantité macroscopique

La définition retenue de la moyenne est

$$\langle g\rangle(t, \underline{x}) \equiv \frac{\int g(\underline{v}_\alpha) f_\alpha(t, \underline{x}, \underline{v}_\alpha) d\underline{v}_\alpha}{\int f_\alpha(t, \underline{x}, \underline{v}_\alpha) d\underline{v}_\alpha} \tag{81}$$

La densité du plasma est donnée par

$$n_\alpha(t, \underline{x}) = \int f_\alpha(t, \underline{x}, \underline{v}_\alpha) d\underline{v}_\alpha \tag{82}$$

Evolution temporelle d'une quantité macroscopique

La dérivation de l'équation gouvernant l'évolution temporelle de $\langle g\rangle$ est basée sur l'équation de Boltzmann

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \underline{v} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \underline{x}} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha}(\underline{E} + \underline{v}_\alpha \times \underline{B}) \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \underline{v}_\alpha} = C_\alpha \tag{83}$$

où $C_\alpha \equiv \sum_\beta C_{\alpha\beta}$, dont on prendra la moyenne du moment g

$$\int \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} g d\underline{v}_\alpha + \int \underline{v}_\alpha \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \underline{x}} g d\underline{v}_\alpha + \int \frac{e_\alpha}{m_\alpha}(\underline{E} + \underline{v}_\alpha \times \underline{B}) \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \underline{v}_\alpha} g d\underline{v}_\alpha \tag{84}$$

$$= \int C_\alpha g d\underline{v}_\alpha$$

Le premier terme s'intègre par parties (f_α, g)

$$\int \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} g d\underline{v}_\alpha = \int \left(\frac{\partial (f_\alpha g)}{\partial t} - f_\alpha \frac{\partial g}{\partial t} \right) d\underline{v}_\alpha \tag{85}$$

Le deuxième terme de l'intégrant est nul car $\partial g / \partial t = 0$, ainsi

$$\int \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} g d\underline{v}_\alpha = \int \frac{\partial (f_\alpha g)}{\partial t} d\underline{v}_\alpha = \frac{\partial}{\partial t} \int f_\alpha g d\underline{v}_\alpha = \frac{\partial}{\partial t} (n_\alpha \langle g \rangle) \tag{86}$$

Le deuxième terme s'intègre aussi par parties (f_α, $\underline{v}g$)

$$\int \underline{v}_\alpha \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \underline{x}} g d\underline{v}_\alpha = \int \left(\frac{\partial (f_\alpha \underline{v}_\alpha g)}{\partial \underline{x}} - f_\alpha \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \cdot (\underline{v}_\alpha g) \right) d\underline{v}_\alpha \tag{87}$$

Le deuxième terme de l'intégrant est nul car g ne dépend pas de la position

$$\int \underline{v}_\alpha \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \underline{x}} g d\underline{v}_\alpha = \int \frac{\partial f_\alpha \underline{v}_\alpha g}{\partial \underline{x}} d\underline{v}_\alpha = \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \cdot \int f_\alpha \underline{v}_\alpha g d\underline{v}_\alpha \tag{88}$$
$$= \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \cdot (n_\alpha \langle \underline{v}_\alpha g \rangle)$$

Le terme faisant intervenir la force électromagnétique $\underline{F}_\alpha = e_\alpha(\underline{E} + \underline{v}_\alpha \times \underline{B})$ s'intègre aussi par parties (f_α, $g\underline{F}_\alpha$)

$$\int \frac{\underline{F}_\alpha}{m_\alpha} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \underline{v}_\alpha} g d\underline{v}_\alpha = \int \left(\frac{\partial}{\partial \underline{v}_\alpha} \cdot \left(\frac{\underline{F}_\alpha}{m_\alpha} f_\alpha g \right) - f_\alpha \frac{\partial}{\partial \underline{v}_\alpha} \cdot \left(\frac{\underline{F}_\alpha}{m_\alpha} g \right) \right) d\underline{v}_\alpha \tag{89}$$

Le premier terme se transforme en une intégrale de surface par le théorème de Gauss; la divergence du produit apparaissant dans le deuxième terme se développe aisément

$$\int \frac{\underline{F}_\alpha}{m_\alpha} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \underline{v}} g d\underline{v}_\alpha \tag{90}$$
$$= \oint_{v_\alpha = \infty} \frac{\underline{F}_\alpha}{m_\alpha} f_\alpha g \cdot d\underline{v}_\alpha - \int f_\alpha \left(g \frac{\partial}{\partial \underline{v}_\alpha} \cdot \frac{\underline{F}_\alpha}{m_\alpha} + \frac{\underline{F}_\alpha}{m_\alpha} \cdot \frac{\partial g}{\partial \underline{v}_\alpha} \right) d\underline{v}_\alpha$$

L'intégrale de surface est nulle car la fonction de distribution f_α tend vers zéro lorsque la vitesse v_α tend vers l'infini; en effet si tel n'était pas le cas l'énergie cinétique du système ne serait pas finie. Dans l'intégrale de volume, la divergence de la force pour $\underline{F}_\alpha = e_\alpha(\underline{E} + \underline{v}_\alpha \times \underline{B})$ est nulle; en effet

$$\frac{\partial}{\partial \underline{v}_\alpha} \cdot (\underline{E} + \underline{v}_\alpha \times \underline{B}) = \underline{B} \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{v}_\alpha} \times \underline{v}_\alpha = 0 \tag{91}$$

Il reste donc du terme lié à la force

$$\int \frac{\underline{F}_\alpha}{m_\alpha} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \underline{v}_\alpha} g d\underline{v}_\alpha = -\int f_\alpha \frac{\underline{F}_\alpha}{m_\alpha} \cdot \frac{\partial g}{\partial \underline{v}_\alpha} d\underline{v}_\alpha = -n_\alpha \langle \frac{\underline{F}_\alpha}{m_\alpha} \cdot \frac{\partial g}{\partial \underline{\underline{v}}_\alpha} \rangle \tag{92}$$

Equation d'évolution temporelle d'une quantité macroscopique

Finalement l'équation régissant l'évolution d'une quantité macroscopique s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial t}(n_\alpha \langle g \rangle) + \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \cdot (n_\alpha \langle \underline{v}_\alpha g \rangle) - n_\alpha \langle \frac{\underline{F}_\alpha}{m_\alpha} \cdot \frac{\partial g}{\partial \underline{v}_\alpha} \rangle = \int C_\alpha g d\underline{v}_\alpha \tag{93}$$

3.2 Equation de continuité

L'équation de continuité pour la densité de particules s'obtient en posant $g = 1$

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \cdot (n_\alpha \langle \underline{v}_\alpha \rangle) = \int C_\alpha d\underline{v}_\alpha \tag{94}$$

Comme la quantité C_α représente la variation temporelle de la fonction de distribution sous l'effet des interactions entre particules, qu'on pourrait noter par $C_\alpha = \Delta f_\alpha / \Delta t$, le terme de droite représente la variation de densité de particules sous l'effet de ces mêmes interactions, soit le terme de source de particules dans le bilan des particules; on adoptera la notation

$$S_\alpha \equiv \int C_\alpha d\underline{v}_\alpha \tag{95}$$

On symbolisera aussi la vitesse moyenne des particules, donc la vitesse d'écoulement du fluide, par

$$\underline{u}_\alpha \equiv \langle \underline{v}_\alpha \rangle \tag{96}$$

et la vitesse microscopique des particules indépendante du mouvement du fluide par

$$\tilde{\underline{v}}_\alpha = \underline{v}_\alpha - \underline{u}_\alpha \tag{97}$$

Manifestement la moyenne de $\tilde{\underline{v}}_\alpha$ est nulle:

$$\langle \tilde{\underline{v}}_\alpha \rangle = \langle \underline{v}_\alpha \rangle - \langle \underline{u}_\alpha \rangle = \underline{u}_\alpha - \underline{u}_\alpha = 0 \tag{98}$$

3.3 Equation du mouvement

L'équation du mouvement ou de Newton pour le fluide s'obtient en choisissant pour g la quantité de mouvement $g = m_\alpha \underline{v}_\alpha$, ce qui mène à

$$\frac{\partial}{\partial t}(n_\alpha m_\alpha \langle \underline{v}_\alpha \rangle) + \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \cdot (n_\alpha m_\alpha \langle \underline{v}_\alpha \underline{v}_\alpha \rangle) - n_\alpha \langle \underline{F}_\alpha \cdot \frac{\partial \underline{v}_\alpha}{\partial \underline{v}_\alpha} \rangle \tag{99}$$
$$= m_\alpha \int C_\alpha \underline{v}_\alpha d\underline{v}_\alpha$$

Ici la notation vectorielle $\underline{a}\underline{b}$ représente le tenseur trois par trois donc les éléments sont $[\underline{a}\underline{b}]_{ij} = a_i b_j$. En particulier le tenseur

$$\left[\frac{\partial \underline{v}_\alpha}{\partial \underline{v}_\alpha}\right]_{ij} = \frac{\partial v_{\alpha i}}{\partial v_{\alpha j}} = \delta_{ij} \tag{100}$$

donc la matrice unité

$$\frac{\partial \underline{v}_\alpha}{\partial \underline{v}_\alpha} = \underline{\underline{1}} \tag{101}$$

Le premier terme de l'équation du mouvement se simplifie en introduisant $\underline{v}_\alpha = \underline{u}_\alpha - \tilde{\underline{v}}_\alpha$

$$\frac{\partial}{\partial t}(n_\alpha m_\alpha \langle \underline{v}_\alpha \rangle) = \frac{\partial}{\partial t}(n_\alpha m_\alpha \underline{u}_\alpha) - \frac{\partial}{\partial t}(n_\alpha m_\alpha \langle \tilde{\underline{v}}_\alpha \rangle) \tag{102}$$

dont le deuxième terme est nul car $\langle \tilde{\underline{v}}_\alpha \rangle = 0$.

Le deuxième tenseur apparaissant dans l'équation du mouvement est $n_\alpha m_\alpha \langle \underline{v}_\alpha \underline{v}_\alpha \rangle$ que l'on écrira en termes de vitesse fluide $\underline{u}_\alpha$ en introduisant $\underline{v}_\alpha = \underline{u}_\alpha + \tilde{\underline{v}}_\alpha$

$$n_\alpha m_\alpha \langle \underline{v}_\alpha \underline{v}_\alpha \rangle = n_\alpha m_\alpha \langle (\underline{u}_\alpha + \tilde{\underline{v}}_\alpha)(\underline{u}_\alpha + \tilde{\underline{v}}_\alpha) \rangle \tag{103}$$
$$= n_\alpha m_\alpha \underline{u}_\alpha \underline{u}_\alpha + n_\alpha m_\alpha \underline{u}_\alpha \langle \tilde{\underline{v}}_\alpha \rangle + n_\alpha m_\alpha \langle \tilde{\underline{v}}_\alpha \rangle \underline{u}_\alpha + n_\alpha m_\alpha \langle \tilde{\underline{v}}_\alpha \tilde{\underline{v}}_\alpha \rangle$$

Les deuxième et troisième termes sont nuls car $\langle \tilde{\underline{v}}_\alpha \rangle = 0$.

Tenseur de pression

On notera le dernier terme

$$\underline{\underline{P}}_\alpha \equiv n_\alpha m_\alpha \langle \tilde{\underline{v}}_\alpha \tilde{\underline{v}}_\alpha \rangle \tag{104}$$

représentant le tenseur de pression, soit la force par unité de surface créée par les interactions entre particules où $[\underline{\underline{P}}_\alpha]_{ij}$ est la force dans la direction i appliquée à une surface de direction j. On obtient finalement

$$n_\alpha m_\alpha \langle \underline{v}_\alpha \underline{v}_\alpha \rangle = n_\alpha m_\alpha \underline{u}_\alpha \underline{u}_\alpha + \underline{\underline{P}}_\alpha \tag{105}$$

Lorsque cette quantité est introduite dans l'équation du mouvement il apparaît la divergence de $\underline{\underline{P}}_\alpha$ dont la notation signifie

$$\left[\frac{\partial}{\partial \underline{x}} \cdot \underline{\underline{P}}_\alpha\right]_j = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} P_{\alpha ij} \tag{106}$$

Force de friction

Le terme liée aux interactions entre particules $m_\alpha \int C_\alpha \underline{v}_\alpha d\underline{v}_\alpha$ se sépare aussi en deux termes en introduisant $\underline{v}_\alpha = \underline{u}_\alpha + \underline{\tilde{v}}_\alpha$

$$m_\alpha \int C_\alpha \underline{v}_\alpha d\underline{v}_\alpha = m_\alpha \underline{u}_\alpha \int C_\alpha d\underline{v}_\alpha + m_\alpha \int C_\alpha \underline{\tilde{v}}_\alpha d\underline{v}_\alpha \tag{107}$$

Le premier terme peut s'écrire

$$m_\alpha \underline{u}_\alpha \int C_\alpha d\underline{v}_\alpha = m_\alpha \underline{u}_\alpha S_\alpha \tag{108}$$

et représente la source d'impulsion apportée par la création de particules de type α. Le deuxième terme s'interprète comme la force créée par les interactions entre particules, à savoir une force de friction que l'on notera

$$\underline{R}_\alpha \equiv m_\alpha \int C_\alpha \underline{\tilde{v}}_\alpha d\underline{v}_\alpha \tag{109}$$

Equation du mouvement

Finalement l'équation du mouvement s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial t}(n_\alpha m_\alpha \underline{u}_\alpha) + \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \cdot (n_\alpha m_\alpha \underline{u}_\alpha \underline{u}_\alpha + \underline{\underline{P}}_\alpha) - n_\alpha \langle \underline{F}_\alpha \rangle \tag{110}$$
$$= m_\alpha \underline{u}_\alpha S_\alpha + \underline{R}_\alpha$$

En développant la dérivé temporelle et la divergence

$$m_\alpha \underline{u}_\alpha \frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + m_\alpha n_\alpha \frac{\partial \underline{u}_\alpha}{\partial t} \tag{111}$$
$$+ m_\alpha \left(\underline{u}_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial \underline{x}} \cdot (n_\alpha \underline{u}_\alpha) \right) + n_\alpha \underline{u}_\alpha \cdot \frac{\partial \underline{u}_\alpha}{\partial \underline{x}} \right) + \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \cdot \underline{\underline{P}}_\alpha - n_\alpha \langle \underline{F}_\alpha \rangle$$
$$= m_\alpha \underline{u}_\alpha S_\alpha + \underline{R}_\alpha$$

où l'on a utilisé le calcul vectoriel suivant

$$\left[\frac{\partial}{\partial \underline{x}} \cdot (n_\alpha \underline{u}_\alpha \underline{u}_\alpha)\right]_j = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}((n_\alpha u_{\alpha i}) u_{\alpha j}) \tag{112}$$

$$= \sum_i u_{\alpha j} \frac{\partial}{\partial x_i}(n_\alpha u_{\alpha i}) + \sum_i n_\alpha u_{\alpha i} \frac{\partial u_{\alpha j}}{\partial x_i}$$

$$= \left[\underline{u}_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial \underline{x}} \cdot (n_\alpha \underline{u}_\alpha)\right) + n_\alpha \underline{u}_\alpha \cdot \frac{\partial \underline{u}_\alpha}{\partial \underline{x}}\right]_j$$

On remarquera que les termes

$$m_\alpha \underline{u}_\alpha \frac{\partial n_\alpha}{\partial t},\ m_\alpha \underline{u}_\alpha \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \cdot (n_\alpha \underline{u}_\alpha) \text{ et } m_\alpha \underline{u}_\alpha S_\alpha \tag{113}$$

s'anullent mutuellement en vertu de l'équation de continuité. Il reste donc

$$m_\alpha n_\alpha \left(\frac{\partial \underline{u}_\alpha}{\partial t} + \underline{u}_\alpha \cdot \frac{\partial \underline{u}_\alpha}{\partial \underline{x}}\right) = \underline{R}_\alpha + n_\alpha \langle \underline{F}_\alpha \rangle - \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \cdot \underline{\underline{P}}_\alpha \tag{114}$$

Interprétation de l'équation du mouvement

On interprétera les différents termes de cette équation du mouvement en reconnaissant la dérivé convective

$$\frac{\partial \underline{u}_\alpha}{\partial t} + \underline{u}_\alpha \cdot \frac{\partial \underline{u}_\alpha}{\partial \underline{x}} = \frac{d\underline{u}_\alpha}{dt} \tag{115}$$

la force de friction $\underline{R}_\alpha$, la densité de force extérieure $n_\alpha \langle \underline{F}_\alpha \rangle$ et la force due à la variation spatiale de la pression $-\partial/(\partial \underline{x}) \cdot \underline{\underline{P}}_\alpha$.

Approximation fluide de la diffusion classique

Problème 5. A partir de l'équation du mouvement fluide stationnaire en présence d'un champ magnétique homogène et en donnant à la force de friction la forme phénoménologique $\underline{R}_\alpha = -n_\alpha m_\alpha \nu_\alpha \underline{u}_\alpha$, dériver le flux de particules puis le coefficient de diffusion associé.

Avec les hypothèses énoncées, l'équation du mouvement s'écrit

$$0 = -n_\alpha m_\alpha \nu_\alpha \underline{u}_\alpha + e_\alpha n_\alpha \underline{u}_\alpha \times \underline{B} - \frac{\partial}{\partial \underline{x}} p_\alpha \tag{116}$$

En fixant le champ magnétique le long de la coordonnée z, on peut écrire cette équation composante par composante et résoudre pour la vitesse. Ici on prendra une température du plasma homogène avec $p_\alpha = n_\alpha T_\alpha$

$$\begin{cases} n_\alpha m_\alpha \nu_\alpha u_{x\alpha} = -T_\alpha \dfrac{dn_\alpha}{dx} + e_\alpha n_\alpha u_{y\alpha} B \\ n_\alpha m_\alpha \nu_\alpha u_{y\alpha} = -T_\alpha \dfrac{dn_\alpha}{dy} - e_\alpha n_\alpha u_{y\alpha} B \\ n_\alpha m_\alpha \nu_\alpha u_{z\alpha} = -T_\alpha \dfrac{dn_\alpha}{dz} \end{cases} \tag{117}$$

Donc

$$\begin{cases} n_\alpha u_{x\alpha}\left(1 + \dfrac{\omega_{c\alpha}^2}{\nu_\alpha^2}\right) = -\dfrac{T_\alpha}{m_\alpha \nu_\alpha}\dfrac{dn_\alpha}{dx} - \dfrac{\omega_{c\alpha}^2}{\nu_\alpha^2}\dfrac{T_\alpha}{e_\alpha B}\dfrac{dn_\alpha}{dy} \\ n_\alpha u_{y\alpha}\left(1 + \dfrac{\omega_{c\alpha}^2}{\nu_\alpha^2}\right) = -\dfrac{T_\alpha}{m_\alpha \nu_\alpha}\dfrac{dn_\alpha}{dy} - e_\alpha n_\alpha u_{y\alpha} B + \dfrac{\omega_{c\alpha}^2}{\nu_\alpha^2}\dfrac{T_\alpha}{e_\alpha B}\dfrac{dn_\alpha}{dx} \\ n_\alpha u_{z\alpha} = -\dfrac{T_\alpha}{m_\alpha \nu_\alpha}\dfrac{dn_\alpha}{dz} \end{cases} \tag{118}$$

Dans la direction parallèle au champ magnétique on note un coefficient de diffusion lié à la mobilité des particules

$$D_{||} = \frac{T_\alpha}{m_\alpha \nu_\alpha} \tag{119}$$

Dans la direction perpendiculaire le flux de particules est formé de deux termes

$$n\underline{u}_\perp = -\frac{D_{||}}{1 + \dfrac{\omega_{c\alpha}^2}{\nu_\alpha^2}} \nabla_\perp n_\alpha + \frac{1}{1 + \dfrac{\omega_{c\alpha}^2}{\nu_\alpha^2}} \frac{T_\alpha}{e_\alpha B^2} \nabla_\perp n_\alpha \times \underline{B} \tag{120}$$

Ceci permet de dériver le coefficient de diffusion perpendiculaire

$$D_\perp = \frac{D_{||}}{1 + \dfrac{\omega_{c\alpha}^2}{\nu_\alpha^2}} \cong \frac{\nu_\alpha^2}{\omega_{c\alpha}^2} D_{||} \tag{121}$$

qui est manifestement beaucoup plus petit que le coefficient de diffusion parallèle.

3.4 Equation pour le moment cinétique

En posant $g = \underline{x} \times m_\alpha \underline{v}_\alpha$ on obtiendrait une équation pour le moment cinétique du fluide autour de l'origine. On peut facilement se rendre compte que cela conduit simplement à multiplier vectoriellement l'équation du mouvement par $\underline{x}$.

Problème 6. Prendre le moment $g = \underline{x} \times m_\alpha \underline{v}_\alpha$ de l'équation de Boltzmann et montrer que celui-ci se ramène au produit vectoriel de l'équation avec $\underline{x}$.

L'équation d'évolution pour la moyenne de $g = \underline{x} \times m_\alpha \underline{v}_\alpha$ donne le point de départ

$$\frac{\partial}{\partial t}(n_\alpha \langle \underline{x} \times m_\alpha \underline{v}_\alpha \rangle) + \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \cdot (n_\alpha \langle \underline{v}_\alpha \underline{x} \times m_\alpha \underline{v}_\alpha \rangle) \tag{122}$$
$$- n_\alpha \langle \underline{F}_\alpha \cdot \frac{\partial(\underline{x} \times \underline{v}_\alpha)}{\partial \underline{v}_\alpha} \rangle = \int C_\alpha \underline{x} \times m_\alpha \underline{v}_\alpha d\underline{v}_\alpha$$

Dans le premier terme ni la dérivé temporelle ni la moyenne sur l'espace des vitesses n'impliquent $\underline{x}$ si bien que

$$\frac{\partial}{\partial t}(n_\alpha \langle \underline{x} \times m_\alpha \underline{v}_\alpha \rangle) = \underline{x} \times \frac{\partial}{\partial t}(n_\alpha \langle m_\alpha \underline{v}_\alpha \rangle) \tag{123}$$

Dans le deuxième terme l'opérateur de divergence et la moyenne sur l'espace des vitesses peuvent dans un premier temps être échangés

$$\frac{\partial}{\partial \underline{x}} \cdot (n_\alpha \langle \underline{v}_\alpha \underline{x} \times m_\alpha \underline{v}_\alpha \rangle) = \langle \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \cdot (n_\alpha \underline{v}_\alpha \underline{x} \times m_\alpha \underline{v}_\alpha) \rangle \tag{124}$$

Puis ensuite la divergence du tenseur développée

$$\langle \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \cdot (n_\alpha \underline{v}_\alpha \underline{x} \times m_\alpha \underline{v}_\alpha) \rangle \tag{125}$$
$$= \langle \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \cdot (n_\alpha \underline{v}_\alpha)(\underline{x} \times m_\alpha \underline{v}_\alpha) \rangle + \langle n_\alpha \underline{v}_\alpha \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{x}}(\underline{x} \times m_\alpha \underline{v}_\alpha) \rangle$$
$$= \underline{x} \times \langle \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \cdot (n_\alpha \underline{v}_\alpha) m_\alpha \underline{v}_\alpha \rangle = \underline{x} \times \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \cdot (n_\alpha m_\alpha \langle \underline{v}_\alpha \underline{v}_\alpha \rangle)$$

Les arguments utilisés sont dans le premier terme le facteur $\underline{x}$ n'intervient pas dans la moyenne et dans le deuxième il convient de calculer explicitement le facteur pour constater qu'il est nul

$$\underline{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{x}}(\underline{x} \times \underline{v}) \tag{126}$$

$$= \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 v_3 - x_3 v_2 & x_3 v_1 - x_1 v_3 & x_1 v_2 - x_2 v_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_2 v_3 - v_3 v_2 \\ v_1 v_3 - v_3 v_1 \\ v_1 v_2 - v_2 v_1 \end{bmatrix} = 0$$

Le terme lié à la force peut aussi s'écrire composante par composante

$$\underline{F} \cdot \frac{\partial(\underline{x} \times \underline{v})}{\partial \underline{v}} \tag{127}$$

$$= \begin{bmatrix} F_1 & F_2 & F_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial v_1} \\ \dfrac{\partial}{\partial v_2} \\ \dfrac{\partial}{\partial v_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 v_3 - x_3 v_2 & x_3 v_1 - x_1 v_3 & x_1 v_2 - x_2 v_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} F_1 & F_2 & F_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & x_3 & -x_2 \\ -x_3 & 0 & x_1 \\ x_2 & -x_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 F_3 - x_3 F_2 \\ x_3 F_1 - x_1 F_3 \\ x_1 F_2 - x_2 F_1 \end{bmatrix} = \underline{x} \times \underline{F}$$

Tant et si bien que

$$\langle \underline{F}_\alpha \cdot \frac{\partial(\underline{x} \times \underline{v}_\alpha)}{\partial \underline{v}_\alpha} \rangle = \underline{x} \times \langle \underline{F}_\alpha \cdot \underline{v}_\alpha \rangle \tag{128}$$

Finalement pour le terme d'interaction entre particules, le même argument entre le facteur $\underline{x}$ et la moyenne sur l'espace des vitesses permet d'écrire

$$\int C_\alpha \underline{x} \times m_\alpha \underline{v}_\alpha d\underline{v}_\alpha = \underline{x} \times \int C_\alpha m_\alpha \underline{v}_\alpha d\underline{v}_\alpha \tag{129}$$

3.5 Equation de continuité pour l'énergie

L'équation pour la continuité de l'énergie s'obtient en choisissant pour g l'énergie cinétique des particules $g = m_\alpha v_\alpha^2 / 2$.

Problème 7. Dériver l'équation fluide pour la continuité de l'énergie en suivant des étapes similaires à celle permettant de dériver l'équation du mouvement. On introduira les quantités $Q_\alpha \equiv \int C_\alpha (m_\alpha \tilde{v}_\alpha^2/2) d\underline{v}_\alpha$ et $\underline{q}_\alpha \equiv (m_\alpha n_\alpha/2)\langle \tilde{v}_\alpha^2 \tilde{\underline{v}}_\alpha\rangle$ et $p_\alpha \equiv tr(\underline{\underline{P}}_\alpha)/3$.

En posant $g = m_\alpha v_\alpha^2/2$ dans l'équation qui régit l'évolution temporelle de $\langle g\rangle$ on obtient

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{m_\alpha n_\alpha}{2}\langle v_\alpha^2\rangle\right) + \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \cdot \left(\frac{m_\alpha n_\alpha}{2}\langle \underline{v}_\alpha v_\alpha^2\rangle\right) - \frac{n_\alpha}{2}\langle \underline{F}_\alpha \cdot \frac{\partial v_\alpha^2}{\partial \underline{v}_\alpha}\rangle \tag{130}$$

$$= \frac{m_\alpha}{2}\int C_\alpha v_\alpha^2 d\underline{v}_\alpha$$

Dans le premier terme on remplacera $\underline{v}_\alpha$ par $\underline{v}_\alpha = \underline{u}_\alpha + \tilde{\underline{v}}_\alpha$ pour séparer les effets liés à l'écoulement du fluide des effets microscopiques

$$\langle v_\alpha^2\rangle = \langle (\underline{u}_\alpha + \tilde{\underline{v}}_\alpha)(\underline{u}_\alpha + \tilde{\underline{v}}_\alpha)\rangle = u_\alpha^2 + 2\underline{u}_\alpha \cdot \langle \tilde{\underline{v}}_\alpha\rangle + \langle \tilde{v}_\alpha^2\rangle \tag{131}$$

Le deuxième terme est nul car $\langle \tilde{\underline{v}}_\alpha\rangle = 0$; en rappelant la définition du tenseur de pression $\underline{\underline{P}}_\alpha \equiv n_\alpha m_\alpha \langle \tilde{\underline{v}}_\alpha \tilde{\underline{v}}_\alpha\rangle$, le troisième terme s'écrit

$$\langle \tilde{v}_\alpha^2\rangle = \langle \sum_i \tilde{v}_{\alpha i}^2\rangle = \frac{\sum_i p_{\alpha ii}}{n_\alpha m_\alpha} = \frac{tr(\underline{\underline{P}}_\alpha)}{n_\alpha m_\alpha} = \frac{3p_\alpha}{n_\alpha m_\alpha} \tag{132}$$

ou la définition de la pression scalaire a été introduite

$$p_\alpha \equiv \frac{tr(\underline{\underline{P}}_\alpha)}{3} \tag{133}$$

Donc

$$\langle v_\alpha^2\rangle = u_\alpha^2 + \frac{3p_\alpha}{n_\alpha m_\alpha} \tag{134}$$

On fera la même substitution pour $\underline{v}_\alpha$ dans le deuxième terme

$$\langle v_\alpha^2 \underline{v}_\alpha\rangle = \langle (\underline{u}_\alpha + \tilde{\underline{v}}_\alpha) \cdot (\underline{u}_\alpha + \tilde{\underline{v}}_\alpha)(\underline{u}_\alpha + \tilde{\underline{v}}_\alpha)\rangle = u_\alpha^2 \underline{u}_\alpha \tag{135}$$
$$+ 2\underline{u}_\alpha \cdot \langle \tilde{\underline{v}}_\alpha\rangle \underline{u}_\alpha + \langle \tilde{v}_\alpha^2\rangle \underline{u}_\alpha + u_\alpha^2 \langle \tilde{\underline{v}}_\alpha\rangle + 2\underline{u}_\alpha \cdot \langle \tilde{\underline{v}}_\alpha \tilde{\underline{v}}_\alpha\rangle$$
$$+ \langle \tilde{v}_\alpha^2 \tilde{\underline{v}}_\alpha\rangle$$

Les termes contenant $\langle \tilde{\underline{v}}_\alpha\rangle$ sont nuls est ceux faisant intervenir $\langle \tilde{v}_\alpha^2\rangle$ et $\langle \tilde{\underline{v}}_\alpha \tilde{\underline{v}}_\alpha\rangle$ peuvent être écrits en fonction du tenseur de pression, respectivement $3p_\alpha/(n_\alpha m_\alpha)$ et $\underline{\underline{P}}_\alpha/(n_\alpha m_\alpha)$. Donc

$$\langle v_\alpha^2 \underline{v}_\alpha \rangle = u_\alpha^2 \underline{u}_\alpha + \frac{3p_\alpha \underline{u}_\alpha}{n_\alpha m_\alpha} + \frac{2\underline{u}_\alpha \cdot \underline{\underline{P}}_\alpha}{n_\alpha m_\alpha} + \langle \tilde{v}_\alpha^2 \tilde{\underline{v}}_\alpha \rangle \qquad (136)$$

On notera la quantité dérivée de $\langle \tilde{v}_\alpha^2 \tilde{\underline{v}}_\alpha \rangle$ par

$$\underline{q}_\alpha = \frac{m_\alpha n_\alpha}{2} \langle \tilde{v}_\alpha^2 \tilde{\underline{v}}_\alpha \rangle \qquad (137)$$

qui exprime le flux de chaleur associée à la vitesse microscopique des particules.

Pour le troisième terme lié à la force, on notera que $\partial v_\alpha^2 / \partial \underline{v}_\alpha = 2\underline{v}_\alpha = 2(\underline{u}_\alpha + \tilde{\underline{v}}_\alpha)$.

Pour le terme d'interaction entre particules, la substition conduit à

$$\begin{aligned} \frac{m_\alpha}{2}\int C_\alpha v_\alpha^2 d\underline{v}_\alpha &= \frac{m_\alpha}{2}\int C_\alpha (\underline{u}_\alpha + \tilde{\underline{v}}_\alpha) \cdot (\underline{u}_\alpha + \tilde{\underline{v}}_\alpha) d\underline{v}_\alpha \\ &= \frac{m_\alpha u_\alpha^2}{2}\int C_\alpha d\underline{v}_\alpha + \underline{u}_\alpha \cdot m_\alpha \int C_\alpha \tilde{\underline{v}}_\alpha d\underline{v}_\alpha + \int C_\alpha \frac{m_\alpha \tilde{v}_\alpha^2}{2} d\underline{v}_\alpha \end{aligned} \qquad (138)$$

Dans le membre de gauche on reconnaît le terme source de particules S_α et la force de friction $\underline{R}_\alpha$; on introduira la puissance générée par les interactions entre particules définie comme

$$Q_\alpha \equiv \int C_\alpha \frac{m_\alpha \tilde{v}_\alpha^2}{2} d\underline{v}_\alpha \qquad (139)$$

Si bien que

$$\frac{m_\alpha}{2}\int C_\alpha v_\alpha^2 d\underline{v}_\alpha = \frac{m_\alpha u_\alpha^2}{2} S_\alpha + \underline{u}_\alpha \cdot \underline{R}_\alpha + Q_\alpha \qquad (140)$$

L'équation de continuité pour l'énergie se résume donc à

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{m_\alpha n_\alpha u_\alpha^2}{2} + \frac{3p_\alpha}{2}\right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \cdot \left(\frac{m_\alpha n_\alpha u_\alpha^2 \underline{u}_\alpha}{2} + \underline{q}_\alpha + \frac{3p_\alpha \underline{u}_\alpha}{2} + \underline{u}_\alpha \cdot \underline{\underline{P}}_\alpha\right) \\ &- n_\alpha \underline{u}_\alpha \cdot \langle \underline{F}_\alpha \rangle - n_\alpha \langle \underline{F}_\alpha \cdot \tilde{\underline{v}}_\alpha \rangle = \frac{m_\alpha u_\alpha^2}{2} S_\alpha + \underline{u}_\alpha \cdot \underline{R}_\alpha + Q_\alpha \end{aligned} \qquad (141)$$

On peut montrer que le term $\langle \underline{F}_\alpha \cdot \tilde{\underline{v}}_\alpha \rangle$ est nul pour la force électromagnétique. En effet

$$\begin{aligned} &\langle(\underline{E} + \underline{v}_\alpha \times \underline{B}) \cdot \tilde{\underline{v}}_\alpha\rangle \\ &= \langle \underline{E} \cdot \tilde{\underline{v}}_\alpha\rangle + \langle \underline{u}_\alpha \times \underline{B} \cdot \tilde{\underline{v}}_\alpha\rangle + \langle \tilde{\underline{v}}_\alpha \times \underline{B} \cdot \tilde{\underline{v}}_\alpha\rangle \\ &= \underline{E} \cdot \langle \tilde{\underline{v}}_\alpha\rangle + \underline{u}_\alpha \times \underline{B} \cdot \langle \tilde{\underline{v}}_\alpha\rangle + \langle \tilde{\underline{v}}_\alpha \times \underline{B} \cdot \tilde{\underline{v}}_\alpha\rangle = 0 \end{aligned} \tag{142}$$

Un développement approprié des dérivés permet d'introduire les équations de continuité et du mouvement et par là des simplifications. D'abord le premier terme de la dérivé temporelle

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{m_\alpha n_\alpha u_\alpha^2}{2}\right) = \frac{m_\alpha u_\alpha^2}{2}\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + m_\alpha n_\alpha \underline{u}_\alpha \cdot \frac{\partial \underline{u}_\alpha}{\partial t} \tag{143}$$

Puis le premier terme de la divergence

$$\frac{\partial}{\partial \underline{x}} \cdot \left(\frac{m_\alpha n_\alpha u_\alpha^2 \underline{u}_\alpha}{2}\right) = \frac{m_\alpha u_\alpha^2}{2}\frac{\partial}{\partial \underline{x}} \cdot (n_\alpha \underline{u}_\alpha) + m_\alpha n_\alpha \underline{u}_\alpha\left(\underline{u}_\alpha \cdot \frac{\partial \underline{u}_\alpha}{\partial \underline{x}}\right) \tag{144}$$

Finalement le terme contenant le tenseur de pression

$$\frac{\partial}{\partial \underline{x}} \cdot (\underline{u}_\alpha \cdot \underline{\underline{P}}_\alpha) = \underline{u}_\alpha \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \cdot \underline{\underline{P}}_\alpha + \underline{\underline{P}}_\alpha : \frac{\partial \underline{u}_\alpha}{\partial \underline{x}} \tag{145}$$

où le produit tensoriel est défini comme

$$\underline{\underline{A}} : \underline{\underline{B}} \equiv \sum_{ij} A_{ij} B_{ji} \tag{146}$$

En effet dans le détail

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \cdot (\underline{u}_\alpha \cdot \underline{\underline{P}}_\alpha) &= \sum_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}(u_{\alpha i} P_{\alpha ij}) \\ &= \sum_{ij} u_{\alpha i} \frac{\partial}{\partial x_j} P_{\alpha ij} + \sum_{ij} P_{\alpha ij} \frac{\partial}{\partial x_j} u_{\alpha i} \\ &= \underline{u}_\alpha \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \cdot \underline{\underline{P}}_\alpha + \underline{\underline{P}}_\alpha : \frac{\partial \underline{u}_\alpha}{\partial \underline{x}} \end{aligned} \tag{147}$$

Il vient donc une équation de continuité pour l'énergie transformée

$$\frac{m_\alpha u_\alpha^2}{2}\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + m_\alpha n_\alpha \underline{u}_\alpha \cdot \frac{\partial \underline{u}_\alpha}{\partial t} + \frac{3}{2}\frac{\partial}{\partial t}p_\alpha \tag{148}$$

$$+ \frac{m_\alpha u_\alpha^2}{2}\frac{\partial}{\partial \underline{x}} \cdot (n_\alpha \underline{u}_\alpha) + m_\alpha n_\alpha \underline{u}_\alpha \cdot \underline{u}_\alpha \cdot \frac{\partial \underline{u}_\alpha}{\partial \underline{x}} + \frac{\partial}{\partial \underline{x}}$$

$$\cdot \left(\underline{q}_\alpha + \frac{3p_\alpha \underline{u}_\alpha}{2}\right) + \underline{u}_\alpha \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \cdot \underline{\underline{P}}_\alpha + \underline{\underline{P}}_\alpha : \frac{\partial \underline{u}_\alpha}{\partial \underline{x}} - n_\alpha \underline{u}_\alpha \cdot \langle \underline{F}_\alpha \rangle$$

$$= \frac{m_\alpha u_\alpha^2}{2} S_\alpha + \underline{u}_\alpha \cdot \underline{R}_\alpha + Q_\alpha$$

Il apparaît maintenant que les termes

$$\frac{m_\alpha u_\alpha^2}{2}\frac{\partial n_\alpha}{\partial t},\ \frac{m_\alpha u_\alpha^2}{2}\frac{\partial}{\partial \underline{x}} \cdot (n_\alpha \underline{u}_\alpha) \text{ et } \frac{m_\alpha u_\alpha^2}{2} S_\alpha \tag{149}$$

s'annullent mutuellement en vertu de l'équation de continuité des particules et que les termes

$$m_\alpha n_\alpha \underline{u}_\alpha \cdot \frac{\partial \underline{u}_\alpha}{\partial t},\ m_\alpha n_\alpha \underline{u}_\alpha \cdot \underline{u}_\alpha \cdot \frac{\partial \underline{u}_\alpha}{\partial \underline{x}},\ \underline{u}_\alpha \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \cdot \underline{\underline{P}}_\alpha,\ n_\alpha \underline{u}_\alpha \cdot \langle \underline{F}_\alpha \rangle \text{ et}$$

$$\underline{u}_\alpha \cdot \underline{R}_\alpha \tag{150}$$

se compensent eu égard à l'équation du mouvement.

Equation de continuité de l'énergie

Il reste

$$\frac{3}{2}\frac{\partial}{\partial t}p_\alpha + \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \cdot \left(\underline{q}_\alpha + \frac{3p_\alpha \underline{u}_\alpha}{2}\right) + \underline{\underline{P}}_\alpha : \frac{\partial \underline{u}_\alpha}{\partial \underline{x}} = Q_\alpha \tag{151}$$

L'interprétation physique des termes est la suivante: le premier terme $(3/2)(\partial p_\alpha / \partial t)$ représente la variation de la densité d'énergie termique, le deuxième est la divergence d'un flux de chaleur fait de deux composantes, $\underline{q}_\alpha$ représente le flux de chaleur lié au mouvement microscopique des particules, c'est à dire tous les effets de transport et le deuxième flux $3p_\alpha \underline{u}_\alpha / 2$ est le flux convectif associé à l'écoulement du fluide; la quantité $\underline{\underline{P}}_\alpha : (\partial \underline{u}_\alpha / \partial \underline{x})$ traduit le travail de la pression fourni lorsque l'élément de volume du fluide change; finalement le membre de droite est la source de chaleur produite par les interactions entre les particules.

3.6 Fermeture des équations fluides

On peut relever que lorsque l'on prend le moment à l'ordre zéro de l'équation de Boltzmann, à savoir $g = 1$, et qu'on la moyenne sur l'espace des vistesses, on a obtenu une équation de continuité pour n_α qui fait intervenir la moyenne $\underline{u}_\alpha \equiv \langle \underline{v}_\alpha \rangle$. En prenant le moment du premier ordre avec $g = m_\alpha \underline{v}_\alpha$, on obtient précisément une équation de continuité pour $\underline{u}_\alpha$, l'équation du mouvement qui laisse apparaître la moyenne d'ordre deux de $\underline{v}_\alpha$, soit $\underline{\underline{P}}_\alpha \equiv n_\alpha m_\alpha \langle \underline{\tilde{v}}_\alpha \underline{\tilde{v}}_\alpha \rangle$. La suite logique est donc de prendre le moment d'ordre deux en posant $g = m_\alpha v_\alpha^{\ 2} / 2$ qui donne une équation de continuité pour $p_\alpha \equiv tr(\underline{\underline{P}}_\alpha) / 3$ qui introduit à son tour une moyenne d'ordre trois, soit $\underline{q}_\alpha \equiv (m_\alpha n_\alpha / 2) \langle \tilde{v}_\alpha^{2} \underline{\tilde{v}}_\alpha \rangle$. Il conviendra donc pour interrompre cette inflation, de clore les équations fluides en introduisant un argument physique.

4. Opérateur de collisions

La première partie de ce chapitre est basée sur le chapitre 6 de [Krall & Trivelpiece] et sur le chapitre 4 de [Miyamoto]; la deuxième sur le chapitre 1.5 de .

Il est souhaitable d'éviter le calcul du terme d'interaction entre particules et de plutôt le traiter à travers une approche plus phénoménologique et ainsi plus abordable. Si ces interactions sont essentiellement le fait de collisions binaires entre particules et que de plus ces collisions résultent en une déviation relativement faible de la trajectoire incidente, il est possible de donner à l'effet des collisions une forme simple.

Probabilité de déflexion

Comme point de départ, la probabilité qu'une particule de type α et de vitesse $\underline{v}_\alpha$ voit sa vitesse défléchie par $\Delta\underline{v}_\alpha$ au cours d'une interaction avec une particule β, est supposée connue

$$\psi_{\alpha\beta}(\underline{v}_\alpha, \Delta\underline{v}_\alpha) \tag{152}$$

Changement de la fonction de distribution dû aux déflexions

L'évolution de la fonction de distribution f_α sous l'effet de ces déflexions est donnée par l'équation aux différences suivantes

$$\begin{aligned} & f_\alpha(t+\Delta t, \underline{x}+\underline{v}_\alpha\Delta t, \underline{v}_\alpha+\Delta\underline{v}_\alpha) \\ & = \sum_\beta \int f_\alpha(t, \underline{x}, \underline{v}_\alpha)\psi_{\alpha\beta}(\underline{v}_\alpha, \Delta\underline{v}_\alpha) d^3\Delta v_\alpha \end{aligned} \tag{153}$$

Hypothèse de petites déflexions

On peut procéder au changement de variable $\underline{v}+\Delta\underline{v} \to \underline{v}$ et à un développement de Taylor en $\Delta\underline{v}$ autour de $\underline{v}$ de la fonction ψ, utilisant ainsi l'hypothèse de petites déviations.

$$\begin{aligned} & f_\alpha(t+\Delta t, \underline{x}+\underline{v}_\alpha\Delta t, \underline{v}_\alpha) \\ & = \sum_\beta \int f_\alpha(t, \underline{x}, \underline{v}_\alpha - \Delta\underline{v}_\alpha)\psi_{\alpha\beta}(\underline{v}_\alpha - \Delta\underline{v}_\alpha, \Delta\underline{v}_\alpha) d^3\Delta v_\alpha \\ & = \sum_\beta \Bigg(\int f_\alpha(t, \underline{x}, \underline{v}_\alpha)\psi_{\alpha\beta}(\underline{v}_\alpha, \Delta\underline{v}_\alpha) d^3\Delta v_\alpha \\ & - \frac{\partial}{\partial \underline{v}_\alpha} \cdot \left(f_\alpha(t, \underline{x}, \underline{v}_\alpha)\int \psi_{\alpha\beta}(\underline{v}_\alpha, \Delta\underline{v}_\alpha)\Delta\underline{v}_\alpha d^3\Delta v_\alpha\right) \\ & + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\underline{v}_\alpha\partial\underline{v}_\alpha} : \left(f_\alpha(t, \underline{x}, \underline{v}_\alpha)\int \psi_{\alpha\beta}(\underline{v}_\alpha, \Delta\underline{v}_\alpha)\Delta\underline{v}_\alpha\Delta\underline{v}_\alpha d^3\Delta v_\alpha\right)\Bigg) \end{aligned} \tag{154}$$

Le premier terme du développement a comme facteur

$$\sum_{\beta} \int \psi_{\alpha\beta} d^3 \Delta v_\alpha = 1 \tag{155}$$

qui vaut un par définition d'une probabilité. On définira ensuite les moyennes

$$\langle \Delta \underline{v}_\alpha \rangle_{\alpha\beta} = \int \psi_{\alpha\beta}(\underline{v}_\alpha, \Delta \underline{v}_\alpha) \Delta \underline{v}_\alpha d^3 \Delta v_\alpha \tag{156}$$

et

$$\langle \Delta \underline{v}_\alpha \Delta \underline{v}_\alpha \rangle_{\alpha\beta} = \int \psi_{\alpha\beta}(\underline{v}_\alpha, \Delta \underline{v}_\alpha) \Delta \underline{v}_\alpha \Delta \underline{v}_\alpha d^3 \Delta v_\alpha \tag{157}$$

pour écrire

$$\frac{\Delta f_\alpha}{\Delta t} = -\frac{\partial}{\partial \underline{v}_\alpha} \cdot \left(\frac{\langle \Delta \underline{v}_\alpha \rangle_{\alpha\beta}}{\Delta t} f_\alpha \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \underline{v}_\alpha \partial \underline{v}_\alpha} : \left(\frac{\langle \Delta \underline{v}_\alpha \Delta \underline{v}_\alpha \rangle_{\alpha\beta}}{\Delta t} f_\alpha \right) \tag{158}$$

4.1 Collisions coulombiennes

Considérons deux particules de charge e_α et e_β, de masse m_α et m_β se déplaçant à une vitesse $\underline{v}_\alpha$ et $\underline{v}_\beta$ et situées initialement loin l'une de l'autre. Le paramètre d'impact, c'est-à-dire la distance entre les deux droites supportant leurs trajectoires incidentes est b.

Calcul de la trajectoire

Problème 8. Calculer l'angle de la déflexion due à l'effet du champ électrique créé par les particules.

Les équations du mouvement non-relativistes de ces particules dans leur champ électrique sont

$$m_\alpha \ddot{\underline{r}}_\alpha = \frac{e_\alpha e_\beta}{4\pi\varepsilon_o} \frac{\underline{r}_\alpha - \underline{r}_\beta}{\left|\underline{r}_\alpha - \underline{r}_\beta\right|^3} \tag{159}$$

$$m_\beta \ddot{\underline{r}}_\beta = \frac{e_\alpha e_\beta}{4\pi\varepsilon_o} \frac{\underline{r}_\beta - \underline{r}_\alpha}{\left|\underline{r}_\alpha - \underline{r}_\beta\right|^3} \tag{160}$$

où $\underline{r}_\alpha$ et $\underline{r}_\beta$ sont leurs positions. On peut d'abord dériver l'équation pour leur mouvement relatif

$$\ddot{\underline{r}}_\alpha - \ddot{\underline{r}}_\beta = \frac{e_\alpha e_\beta}{4\pi\varepsilon_o} \left(\frac{1}{m_\alpha} + \frac{1}{m_\beta} \right) (\underline{r}_\alpha - \underline{r}_\beta) \tag{161}$$

où

$$\mu_{\alpha\beta}\ddot{\underline{r}} = \frac{e_\alpha e_\beta}{4\pi\varepsilon_o} \frac{\underline{r}}{r^3} \tag{162}$$

avec la masse réduite du système

$$\mu_{\alpha\beta} = \frac{m_\alpha m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \tag{163}$$

et $\underline{r} = \underline{r}_\alpha - \underline{r}_\beta$. La position du centre de gravité suit l'équation du mouvement

$$\frac{m_\alpha \ddot{\underline{r}}_\alpha + m_\beta \ddot{\underline{r}}_\beta}{m_\alpha + m_\beta} = \ddot{\underline{R}} = 0 \tag{164}$$

démontrant bien qu'il se déplace à vitesse constante.

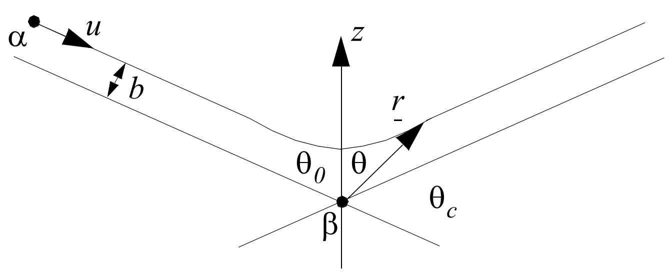
Le problème se réduit donc à la trajectoire d'une particule de masse $\mu_{\alpha\beta}$ de vitesse initiale $\underline{u} = \underline{v}_\alpha - \underline{v}_\beta$ dans le champ d'une particule fixe de charge e_β. En coordonnées polaires (r, θ) la composante azimutale de la force électrique toujours radiale est nulle et le moment cinétique azimutal

$$rp_\theta = \mu_{\alpha\beta} r^2 \dot{\theta} \tag{165}$$

est une constante du mouvement que l'on peut fixer à partir des conditions initiales

$$\mu_{\alpha\beta} r^2 \dot{\theta} = \mu_{\alpha\beta} b u \tag{166}$$

Selon l'axe z du repère suivant



le changement de quantité de mouvement entre les conditions initiales et finales est

$$\Delta p_z = p_z(t=\infty) - p_z(t=-\infty) = 2\mu_{\alpha\beta} u \cos\theta_o \tag{167}$$

ou en introduisant la composante de la force selon cet axe

$$\Delta p_z = \int_{-\infty}^{\infty} F_z dt = \frac{e_\alpha e_\beta}{4\pi\varepsilon_o}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\theta}{r^2}dt = \frac{e_\alpha e_\beta}{4\pi\varepsilon_o}\int_{-\theta_o}^{\theta_o}\frac{\cos\theta}{r^2\dot{\theta}}d\theta \tag{168}$$

qui est facile à calculer si l'on se souvient que $r^2\dot{\theta}$ est une constante du mouvement qui vaut bu

$$\Delta p_z = \frac{e_\alpha e_\beta}{2\pi\varepsilon_o bu}\sin\theta_o \tag{169}$$

Déflexion

L'angle de déflexion peut maintenant s'écrire

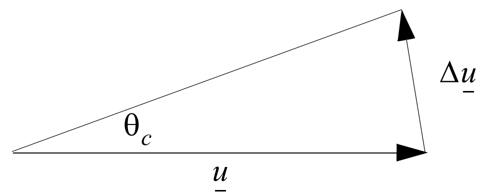
$$\cot\theta_o = \tan\frac{\theta_c}{2} = \frac{e_\alpha e_\beta}{4\pi\varepsilon_o \mu_{\alpha\beta} bu^2} \tag{170}$$

Petite déflexion

Les composantes du changement de vitesse accompagnant cette déflexion décomposée selon la direction parallèle à la vitesse incidente et les deux autres directions perpendiculaires sont (φ représente l'angle dans le plan perpendiculaire à la vitesse incidente)

$$\Delta \underline{u} = 2u\sin\frac{\theta_c}{2}\left[-\sin\frac{\theta_c}{2},\ \cos\frac{\theta_c}{2}\sin\varphi,\ \cos\frac{\theta_c}{2}\cos\varphi\right] \tag{171}$$

d'après la figure suivante



Dans le cas de petite déflexion cette variation de vitesse s'approxime par

$$\Delta \underline{u} = u\left[-\frac{\theta_c^2}{2},\ \theta_c\sin\varphi,\ \theta_c\cos\varphi\right] + 0(\theta_c^3) \tag{172}$$

4.2 Coefficients de Fokker-Planck

Il s'agit maintenant de dériver une expression pour la variation de vitesse de la particule α moyennée sur toutes les particules β. Les expressions seront ensuite introduites dans les deux termes de l'opérateur de collisions intervenant dans l'équation de Fokker-Planck, à savoir $\langle \Delta \underline{v}_{\alpha} \rangle_{\alpha\beta}$ et $\langle \Delta \underline{v}_{\alpha} \Delta \underline{v}_{\alpha} \rangle_{\alpha\beta}$.

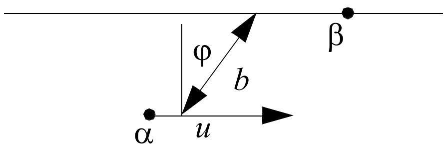
Premier coefficient

D'abord le terme $\langle \Delta \underline{v}_{\alpha} \rangle_{\alpha\beta}$ se déduira de

$$\langle \Delta \underline{u} \rangle = \int \Delta \underline{u} f_{\beta} d^3 x d^3 v \tag{173}$$

Le facteur $f_{\beta} d^3 x$ correspond aux nombre de particules β impliquées et peut s'exprimer en fonction de la vitesse d'approche et du paramètre d'impact

$$f_{\beta} d^3 x = f_{\beta} u \Delta t b db d\varphi \tag{174}$$



Ainsi

$$\langle \Delta \underline{u} \rangle = \int u \left[\frac{-\theta_c^2}{2}, \theta_c \sin\varphi, \theta_c \cos\varphi \right] f_{\beta} u \Delta t b db d\varphi d^3 v_{\beta} \tag{175}$$

Selon les directions perpendiculaires les intégrales sur φ s'annulent si bien que en introduisant l'expression pour θ_c

$$\langle \Delta \underline{u} \rangle = -\frac{e_{\alpha} e_{\beta}}{4\pi\varepsilon_o \mu_{\alpha\beta}^2} \int f_{\beta} \frac{\underline{u}}{u^3} \frac{db}{b} d^3 v_{\beta} \Delta t \tag{176}$$

On notera temporairement sans la discuter

$$\int \frac{db}{b} = \ln\Lambda \tag{177}$$

Il faut finalement revenir dans le repère du laboratoire

$$\underline{v}_{\alpha} = \dot{\underline{R}} + \frac{\mu_{\alpha\beta}}{m_{\alpha}} \underline{u} \tag{178}$$

donc

$$\Delta \underline{v}_\alpha = \frac{\mu_{\alpha\beta}}{m_\alpha} \Delta \underline{u} \tag{179}$$

Le coefficient du premier terme de collisions est donc

$$\frac{\langle \Delta \underline{v}_\alpha \rangle_{\alpha\beta}}{\Delta t} = -\frac{e_\alpha^2 e_\beta^2 \ln \Lambda}{4\pi\varepsilon_o^2 m_\alpha \mu_{\alpha\beta}} \int f_\beta \frac{\underline{u}}{u^3} d^3 v_\beta \tag{180}$$

Deuxième coefficient

Un traitement similaire peut être appliqué pour tenseur $\langle \Delta \underline{v} \Delta \underline{v} \rangle_{\alpha\beta}$

$$\langle \Delta \underline{u} \Delta \underline{u} \rangle = \int \Delta \underline{u} \Delta \underline{u} f_\beta d^3 \underline{x} d^3 \underline{v}_\beta \tag{181}$$

$$= \int u^2 \begin{bmatrix} 0(\theta_c^4) & \sin\varphi\theta_c^3/2 & \cos\varphi\theta_c^3/2 \\ \sin\varphi\theta_c^3/2 & \sin^2\varphi\theta_c^2 & \sin\varphi\cos\varphi\theta_c^2 \\ \cos\varphi\theta_c^3/2 & \sin\varphi\cos\varphi\theta_c^2 & \cos^2\varphi\theta_c^2 \end{bmatrix} f_\beta u \Delta t b db d\varphi d^3 v_\beta$$

En ne retenant que les termes en θ_c^2 il reste

$$\frac{\langle \Delta \underline{u} \Delta \underline{u} \rangle}{\Delta t} = \frac{e_\alpha^2 e_\beta^2 \ln \Lambda}{4\pi\varepsilon_o^2 \mu_{\alpha\beta}^2} \int \frac{1}{u} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} f_\beta d^3 v_\beta \tag{182}$$

Le changement de repère requiert ici quelque attention. La matrice de passage M entre le repère lié au centre de masse $[\hat{e}_1 = \underline{u}/u, \hat{e}_2, \hat{e}_3]$ et le laboratoire, et son inverse M^{-1} aussi d'ailleurs, peut s'écrire

$$M = M^{-1} = \frac{1}{u} \left[\underline{u}, \hat{e}_3 \times \underline{u}, \underline{u} \times \hat{e}_2 \right] \tag{183}$$

En séparant le tenseur de $\langle \Delta \underline{u} \Delta \underline{u} \rangle$ en deux termes

$$\frac{\langle \Delta \underline{u} \Delta \underline{u} \rangle}{\Delta t} = \frac{e_\alpha^2 e_\beta^2 \ln \Lambda}{4\pi\varepsilon_o^2 \mu_{\alpha\beta}^2} \int \frac{1}{u} \left(\underline{\underline{1}} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) f_\beta d^3 v_\beta \tag{184}$$

et en appliquant le changement de repère

$$\frac{\langle \Delta \underline{v}_\alpha \Delta \underline{v}_\alpha \rangle_{\alpha\beta}}{\Delta t} = M^{-1} \cdot \frac{\langle \Delta \underline{u} \Delta \underline{u} \rangle}{\Delta t} \cdot M \tag{185}$$

on fera apparaître

$$\frac{1}{u}\left[\underline{u} \ \ \hat{e}_3 \times \underline{u} \ \ \underline{u} \times \hat{e}_2\right]\left(\underline{\underline{1}} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\frac{1}{u}\left[\underline{u} \ \ \hat{e}_3 \times \underline{u} \ \ \underline{u} \times \hat{e}_2\right] \tag{186}$$

qui se réduit aisément en

$$\underline{\underline{1}} - \frac{\underline{u}\,\underline{u}}{u^2} \tag{187}$$

Ainsi le coefficient du deuxième terme de l'opérateur de collisions est

$$\frac{\langle \Delta \underline{v}_\alpha \Delta \underline{v}_\alpha \rangle_{\alpha\beta}}{\Delta t} = \frac{e_\alpha^2 e_\beta^2 \ln\Lambda}{4\pi\varepsilon_o^2 m_\alpha^2} \int f_\beta \frac{u^2 \underline{\underline{1}} - \underline{u}\,\underline{u}}{u^3} d^3 v_\beta \tag{188}$$

Logarithme de Coulomb

Revenons sur l'intégrale sur le paramètre d'impact, appelé logarithme de Coulomb. Clairement celle-ci doit être limitée dans ses bornes inférieure et supérieure sinon elle diverge. Comme borne inférieure on peut prendre la valeur du paramètre d'impact qui conduit à une déflexion de $\pi/2$, considérant que seules les petites déflexions ont été traitées

$$b_{min} = \frac{e_\alpha^2 e_\beta^2}{4\pi\varepsilon_o \mu_{\alpha\beta} u^2} \cong \frac{e_\alpha e_\beta}{12\pi\varepsilon_o T_e} \tag{189}$$

La limite supérieure peut être choisie égale à la longueur de Debye en dessus de laquelle la charge de la particule β est écrantée

$$b_{max} = \lambda_D = \left(\frac{\varepsilon_o T_e}{n_e e^2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{190}$$

Finalement

$$\ln\Lambda = \ln\left(\frac{12\pi\varepsilon_o^{3/2}}{e^3} \frac{T_e^{3/2}}{Z n_e^{1/2}}\right) \tag{191}$$

dont la valeur numérique se situe autour de 18 pour un plasma thermonucléaire.

4.3 Opérateur de collisions

Il est maintenant possible d'écrire complètement le terme de collisions dans l'équation de Fokker-Planck en l'exprimant comme la variation de f_α due aux collisions coulombiennes de faible déflexion

$$C_{\alpha\beta} = \frac{\Delta f_\alpha}{\Delta t} = \frac{\partial}{\partial \underline{v}_\alpha} \cdot \left(\frac{2c_{\alpha\beta}}{m_\alpha \mu_{\alpha\beta}} \int \frac{\underline{u}}{u^3} f_\beta(\underline{v}_\beta) d^3 v_\beta f_\alpha(\underline{v}_\alpha) \right. \tag{192}$$

$$\left. + \frac{c_{\alpha\beta}}{m_\alpha^2} \frac{\partial}{\partial \underline{v}_\alpha} \cdot \left(\int \frac{u^2 \underline{\underline{1}} - \underline{u}\underline{u}}{u^3} f_\beta(\underline{v}_\beta) d^3 v_\beta f_\alpha(\underline{v}_\alpha) \right) \right)$$

Ici

$$c_{\alpha\beta} = \frac{e_\alpha^2 e_\beta^2 \ln \Lambda}{8\pi\varepsilon_o^2} \tag{193}$$

On parlera d'un opérateur de collisions qui s'applique aux deux fonctions de distribution f_α et f_β : $C_{\alpha\beta}(f_\alpha, f_\beta)$.

Interprétation physique

Une interprétation physique de ces deux termes peut être proposée en écrivant l'équation sous la forme suivante en l'absence d'inhomogénéité spatiale et de champ extérieur

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = \sum_\beta C_{\alpha\beta} = -\sum_\beta \frac{\partial}{\partial \underline{v}_\alpha} \cdot \left(\underline{A}_{\alpha\beta} f_\alpha - \frac{\partial}{\partial \underline{v}_\alpha} \cdot (\underline{\underline{D}}_{\alpha\beta} f_\alpha) \right) \tag{194}$$

qui apparaît comme une équation de continuité dans l'espace des vitesses pour la fonction de distribution.

Friction dynamique

Le flux est composé d'un terme dit de friction dynamique où intervient le vecteur

$$\underline{A}_{\alpha\beta} = -\frac{2c_{\alpha\beta}}{m_\alpha \mu_{\alpha\beta}} \int \frac{\underline{u}}{u^3} f_\beta d^3 v_\beta \tag{195}$$

Ce terme devient important lorsque la fonction de distribution f_α présente une majorité de particules avec une vitesse élevée; la friction dynamique est alors proportionnelle à cette vitesse et tend à ramener les particules vers l'origine de l'espace des vitesses.

Diffusion dans l'espace des vitesses

Le deuxième terme contient le tenseur de diffusion dans l'espace des vitesses

$$\underline{\underline{D}}_{\alpha\beta} = \frac{c_{\alpha\beta}}{m_\alpha^2}\int \frac{u^2\underline{\underline{1}} - \underline{u}\underline{u}}{u^3} f_\beta d^3 v_\beta \tag{196}$$

Ce terme devient dominant lorsque s'installent dans la fonction de distribution f_α de forts gradients dans l'espace des vitesses et il tend alors à éloigner les particules de ces régions. A l'équilibre ces deux termes, dont le premier pousse les particules vers la région de vitesse nulle et dont le deuxième tend à éviter un empilement à cet endroit, se compensent.

Forme de Landau

Une forme très utile, connue sous le nom de forme de Landau, de l'opérateur peut-être dérivée.

$$C_{\alpha\beta} = \frac{c_{\alpha\beta}}{m_\alpha}\frac{\partial}{\partial \underline{v}_\alpha} \cdot \int \frac{u^2\underline{\underline{1}} - \underline{u}\underline{u}}{u^3} \cdot \left(\frac{f_\beta}{m_\alpha}\frac{\partial f_\alpha}{\partial \underline{v}_\alpha} - \frac{f_\alpha}{m_\beta}\frac{\partial f_\beta}{\partial \underline{v}_\beta}\right) d^3 v_\beta \tag{197}$$

Problème 9. Dériver la forme de Landau de l'opérateur de collisions. Il est utile de calculer au préalable la dérivé $(\partial/\partial\underline{u}) \cdot ((u^2\underline{\underline{1}} - \underline{u}\underline{u})/u^3)$.

On calculera donc d'abord

$$\frac{\partial}{\partial \underline{u}} \cdot \left(\frac{u^2\underline{\underline{1}} - \underline{u}\underline{u}}{u^3}\right) = \frac{\partial}{\partial \underline{u}} \cdot \left(\frac{\underline{\underline{1}}}{u} - \frac{\underline{u}}{u^3}\underline{u}\right) \tag{198}$$

$$= \frac{\partial}{\partial \underline{u}} u^{-1} - \left(\frac{\partial}{\partial \underline{u}} \cdot \frac{\underline{u}}{u^3}\right)\underline{u} - \frac{\underline{u}}{u^3} \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{u}}\underline{u}$$

qui avec

$$\frac{\partial}{\partial \underline{u}} u^{-1} = -\frac{\underline{u}}{u^3} \tag{199}$$

$$\frac{\partial}{\partial \underline{u}} \cdot \frac{\underline{u}}{u^3} = 4\pi\delta(\underline{u}) \tag{200}$$

$$\frac{\partial}{\partial \underline{u}}\underline{u} = \underline{\underline{1}} \tag{201}$$

devient

$$\frac{\partial}{\partial \underline{u}} \cdot \left(\frac{u^2 \underline{\underline{1}} - \underline{u}\,\underline{u}}{u^3} \right) = -\frac{2\underline{u}}{u^3} \qquad (202)$$

considérant que $\delta(\underline{u})\underline{u} = 0$.

Cette formule pourrait donc permettre de rendre le premier coefficient de Fokker-Planck qui contient comme facteur $2\underline{u}/u^3$ semblable au deuxième coefficient qui lui contient $(\partial/\partial \underline{v}_\alpha) \cdot ((u^2 \underline{\underline{1}} - \underline{u}\,\underline{u})/u^3)$. Pour cela il faut se rendre compte que pour une fonction de $\underline{u} = \underline{v}_\alpha - \underline{v}_\beta$ les opérateurs différentiels $\partial/\partial \underline{u}$, $\partial/\partial \underline{v}_\alpha$, $-\partial/\partial \underline{v}_\beta$ sont équivalents.

On pourra donc partir de l'opérateur de collisions dans lequel on a utilisé le fait que $1/\mu_{\alpha\beta} = 1/m_\alpha + 1/m_\beta$

$$C_{\alpha\beta} = \frac{c_{\alpha\beta}}{m_\alpha} \frac{\partial}{\partial \underline{v}_\alpha} \cdot \left(\left(\frac{1}{m_\alpha} + \frac{1}{m_\beta} \right) \int \frac{2\underline{u}}{u^3} f_\beta(\underline{v}_\beta) d^3 v_\beta f_\alpha(\underline{v}_\alpha) \right. \qquad (203)$$
$$\left. + \frac{1}{m_\alpha} \frac{\partial}{\partial \underline{v}_\alpha} \cdot \left(\int \frac{u^2 \underline{\underline{1}} - \underline{u}\,\underline{u}}{u^3} f_\beta(\underline{v}_\beta) d^3 v_\beta f_\alpha(\underline{v}_\alpha) \right) \right)$$

et effectuer la substitution

$$\frac{2\underline{u}}{u^3} = \frac{\partial}{\partial \underline{v}_\beta} \cdot \left(\frac{u^2 \underline{\underline{1}} - \underline{u}\,\underline{u}}{u^3} \right) \qquad (204)$$

et développer la dérivé dans le deuxième terme

$$C_{\alpha\beta} = \frac{c_{\alpha\beta}}{m_\alpha} \frac{\partial}{\partial \underline{v}_\alpha} \cdot \left(\int \frac{\partial}{\partial \underline{v}_\beta} \cdot \frac{u^2 \underline{\underline{1}} - \underline{u}\,\underline{u}}{u^3} \frac{f_\alpha}{m_\alpha} f_\beta d^3 v_\beta + \int \frac{\partial}{\partial \underline{v}_\beta} \right. \qquad (205)$$
$$\cdot \frac{u^2 \underline{\underline{1}} - \underline{u}\,\underline{u}}{u^3} f_\alpha \frac{f_\beta}{m_\beta} d^3 v_\beta + \int \frac{\partial}{\partial \underline{v}_\alpha} \cdot \frac{u^2 \underline{\underline{1}} - \underline{u}\,\underline{u}}{u^3} \frac{f_\alpha}{m_\alpha} f_\beta d^3 v_\beta$$
$$\left. + \int \frac{u^2 \underline{\underline{1}} - \underline{u}\,\underline{u}}{u^3} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \underline{v}_\alpha} \frac{f_\beta}{m_\alpha} d^3 v_\beta \right)$$

La première et la troisième intégrales s'annulent mutuellement car $\partial/\partial \underline{v}_\alpha$ et $-\partial/\partial \underline{v}_\beta$ sont équivalents. La deuxième peut être intégrée par parties

$$\int \frac{\partial}{\partial \underline{v}_\beta} \cdot \frac{u^2 \underline{\underline{1}} - \underline{u}\,\underline{u}}{u^3} f_\beta d^3 v_\beta \qquad (206)$$
$$= \oint_{v_\beta = \infty} \frac{u^2 \underline{\underline{1}} - \underline{u}\,\underline{u}}{u^3} f_\beta \cdot d^2 \underline{v}_\beta - \int \frac{u^2 \underline{\underline{1}} - \underline{u}\,\underline{u}}{u^3} \cdot \frac{\partial f_\beta}{\partial \underline{v}_\beta} d^3 v_\beta$$

dont le terme de surface s'intègre à 0 car $f_\beta(v_\beta = \infty) = 0$. Il reste donc la forme compacte et élégante par sa symétrie en α et β

$$C_{\alpha\beta} = \frac{c_{\alpha\beta}}{m_\alpha}\frac{\partial}{\partial \underline{v}_\alpha} \cdot \int \frac{u^2 \underline{\underline{1}} - \underline{u}\,\underline{u}}{u^3} \cdot \left(\frac{f_\beta}{m_\alpha}\frac{\partial f_\alpha}{\partial \underline{v}_\alpha} - \frac{f_\alpha}{m_\beta}\frac{\partial f_\beta}{\partial \underline{v}_\beta} \right) d^3 v_\beta \tag{207}$$

Une formulation alternative parfois utile est

$$C_{\alpha\beta} = \frac{c_{\alpha\beta}}{m_\alpha}\frac{\partial}{\partial \underline{v}_\alpha} \cdot \int f_\alpha f_\beta \frac{u^2 \underline{\underline{1}} - \underline{u}\,\underline{u}}{u^3} \cdot \underline{\chi}_{\alpha\beta} d^3 v_\beta \tag{208}$$

avec

$$\underline{\chi}_{\alpha\beta}(\underline{v}_\alpha, \underline{v}_\beta) = \frac{\partial ln f_\alpha}{m_\alpha \partial \underline{v}_\alpha} - \frac{\partial ln f_\beta}{m_\beta \partial \underline{v}_\beta} \tag{209}$$

4.4 Potentiels de Rosenbluth

La similitude entre l'expression pour la friction dynamique et celle pour le champ électrique produit en un point $\underline{v}_\alpha$ par une distribution de charge $f_\beta(\underline{v}_\beta)$ donnée suggère que la friction dynamique puisse être tirée d'un potentiel en $1/|\underline{v}_\alpha - \underline{v}_\beta|$.

Premier potentiel de Rosenbluth

En effet en écrivant

$$h_\beta(\underline{v}_\alpha) \equiv \int \frac{f_\beta(\underline{v}_\beta)}{|\underline{v}_\alpha - \underline{v}_\beta|} d^3 v_\beta = \int \frac{f_\beta}{u} d^3 v_\beta \tag{210}$$

on remarque que

$$\frac{\partial h_\beta}{\partial \underline{v}_\alpha} = -\int \frac{\underline{u}}{u^3} f_\beta d^3 v_\beta \tag{211}$$

et que

$$\underline{A}_{\alpha\beta} = \frac{2 c_{\alpha\beta}}{m_\alpha \mu_{\alpha\beta}} \frac{\partial h_\beta}{\partial \underline{v}_\alpha} \tag{212}$$

Deuxième potentiel de Rosenbluth

De même en calculant

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \underline{u} \partial \underline{u}} = \frac{\partial}{\partial \underline{u}} \frac{\underline{u}}{u} = \frac{u^2 \underline{\underline{1}} - \underline{u}\,\underline{u}}{u^3} \tag{213}$$

on pourra choisir le deuxième potentiel de Rosenbluth comme

$$g_\beta(\underline{v}_\alpha) \equiv \int u f_\beta d^3 v_\beta \tag{214}$$

De cette manière

$$\frac{\partial^2 g_\beta}{\partial \underline{v}_\alpha \partial \underline{v}_\alpha} = \int \frac{u^2 \underline{\underline{1}} - \underline{u}\underline{u}}{u^3} f_\beta d^3 v_\beta \tag{215}$$

et le tenseur de diffusion dans l'espace des vitesses s'écrit

$$\underline{\underline{D}}_{\alpha\beta} = \frac{c_{\alpha\beta}}{m_\alpha^2} \frac{\partial^2 g_\beta}{\partial \underline{v}_\alpha \partial \underline{v}_\alpha} \tag{216}$$

Propriétés mathématiques des potentiels de Rosenbluth

L'avantage d'utiliser les potentiels de Rosenbluth réside dans les propriétés de leurs dérivés.

La première dérivé à dériver est

$$\frac{\partial}{\partial \underline{v}_\alpha} \cdot \frac{\partial h_\beta}{\partial \underline{v}_\alpha} = \int \left(\frac{\partial}{\partial \underline{v}_\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{v}_\alpha} \frac{1}{u} \right) f_\beta d^3 v_\beta \tag{217}$$

En utilisant

$$\frac{\partial}{\partial \underline{u}} \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{u}} \frac{1}{u} = -\frac{\partial}{\partial \underline{u}} \cdot \frac{\underline{u}}{u^3} = -4\pi \delta(\underline{u}) \tag{218}$$

elle devient

$$\frac{\partial}{\partial \underline{v}_\alpha} \cdot \frac{\partial h_\beta}{\partial \underline{v}_\alpha} = -4\pi \int \delta(\underline{u}) f_\beta d^3 v_\beta = -4\pi f_\beta(\underline{v}_\beta = \underline{v}_\alpha) \tag{219}$$

La deuxième dérivé utile est

$$\frac{\partial}{\partial \underline{v}_\alpha} \cdot \frac{\partial^2 g_\beta}{\partial \underline{v}_\alpha \partial \underline{v}_\alpha} = \int \frac{\partial}{\partial \underline{v}_\alpha} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \underline{v}_\alpha \partial \underline{v}_\alpha} f_\beta d^3 v_\beta \tag{220}$$

La deuxième relation déjà rencontrée

$$\frac{\partial}{\partial \underline{u}} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \underline{u} \partial \underline{u}} = -2 \frac{\underline{u}}{u^3} = 2 \frac{\partial}{\partial \underline{u}} \frac{1}{u} \tag{221}$$

et permet d'écrire

$$\frac{\partial}{\partial \underline{v}_\alpha} \cdot \frac{\partial^2 g_\beta}{\partial \underline{v}_\alpha \partial \underline{v}_\alpha} = \int 2 \frac{\partial}{\partial \underline{v}_\alpha} \frac{1}{u} f_\beta d^3 v_\beta = 2 \frac{\partial h_\beta}{\partial \underline{v}_\alpha} \quad (222)$$

La dernière dérivé combine les deux précédantes

$$\frac{\partial}{\partial \underline{v}_\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{v}_\alpha} \cdot \frac{\partial^2 g_\beta}{\partial \underline{v}_\alpha \partial \underline{v}_\alpha} = 2 \frac{\partial}{\partial \underline{v}_\alpha} \cdot \frac{\partial h_\beta}{\partial \underline{v}_\alpha} = -8\pi f_\beta(\underline{v}_\beta = \underline{v}_\alpha) \quad (223)$$

Finalement il apparaît souvent la trace de $\underline{\underline{D}}_{\alpha\beta}$ dont le calcul est basé sur

$$tr\left(\frac{\partial^2 g_\beta}{\partial \underline{v}_\alpha \partial \underline{v}_\alpha}\right) = \frac{\partial}{\partial \underline{v}_\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{v}_\alpha} g_\beta = \int \frac{\partial}{\partial \underline{v}_\alpha} \cdot \frac{\partial u}{\partial \underline{v}_\alpha} f_\beta d^3 v_\beta \quad (224)$$

En remarquant que

$$\frac{\partial}{\partial \underline{u}} \cdot \frac{\partial u}{\partial \underline{u}} = \frac{3}{u} - \frac{\underline{u} \cdot \underline{u}}{u^3} = \frac{2}{u} \quad (225)$$

on obtient

$$tr\left(\frac{\partial^2 g_\beta}{\partial \underline{v}_\alpha \partial \underline{v}_\alpha}\right) = \frac{\partial}{\partial \underline{v}_\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{v}_\alpha} g_\beta = \int \frac{2}{u} f_\beta d^3 v_\beta = 2 h_\beta \quad (226)$$

Opérateur de collisions exprimé par les potentiels de Rosenbluth

L'opérateur de collisions exprimé au moyen des potentiels de Rosenbluth prend alors la forme

$$C_{\alpha\beta}(f_\alpha, f_\beta) = \frac{2 c_{\alpha\beta}}{m_\alpha^2} \frac{\partial}{\partial \underline{v}_\alpha} \cdot \left(-\frac{m_\alpha}{\mu_{\alpha\beta}} \frac{\partial h_\beta}{\partial \underline{v}_\alpha} f_\alpha + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \underline{v}_\alpha} \cdot \left(\frac{\partial^2 g_\beta}{\partial \underline{v}_\alpha \partial \underline{v}_\alpha} f_\alpha \right) \right) \quad (227)$$

Une forme plus éconôme en calculs peut être utilisée en développant les dérivés et en introduisant certaines propriétés des potientiels de Rosenbluth. On commencera donc par effectuer toutes les dérivés

$$C_{\alpha\beta}(f_\alpha, f_\beta) = \frac{2c_{\alpha\beta}}{m_\alpha^2}\left(-\frac{m_\alpha}{\mu_{\alpha\beta}}\frac{\partial}{\partial \underline{v}_\alpha} \cdot \frac{\partial h_\beta}{\partial \underline{v}_\alpha} f_\alpha - \frac{m_\alpha}{\mu_{\alpha\beta}}\frac{\partial h_\beta}{\partial \underline{v}_\alpha} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \underline{v}_\alpha}\right. \tag{228}$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \underline{v}_\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{v}_\alpha} \cdot \frac{\partial^2 g_\beta}{\partial \underline{v}_\alpha \partial \underline{v}_\alpha} f_\alpha + \frac{\partial}{\partial \underline{v}_\alpha} \cdot \frac{\partial^2 g_\beta}{\partial \underline{v}_\alpha \partial \underline{v}_\alpha} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \underline{v}_\alpha}$$
$$\left. + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_\beta}{\partial \underline{v}_\alpha \partial \underline{v}_\alpha} : \frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial \underline{v}_\alpha \partial \underline{v}_\alpha}\right)$$

En utilisant les propriétés des dérivés des potentiels de Rosenbluth il vient

$$C_{\alpha\beta}(f_\alpha, f_\beta) = \frac{2c_{\alpha\beta}}{m_\alpha^2}\left(4\pi\frac{m_\alpha}{\mu_{\alpha\beta}} f_\beta(\underline{v}_\beta = \underline{v}_\alpha) f_\alpha - \frac{m_\alpha}{\mu_{\alpha\beta}}\frac{\partial h_\beta}{\partial \underline{v}_\alpha} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \underline{v}_\alpha}\right. \tag{229}$$
$$\left. + 4\pi f_\beta(\underline{v}_\beta = \underline{v}_\alpha) f_\alpha + 2\frac{\partial h_\beta}{\partial \underline{v}_\alpha} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \underline{v}_\alpha} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_\beta}{\partial \underline{v}_\alpha \partial \underline{v}_\alpha} : \frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial \underline{v}_\alpha \partial \underline{v}_\alpha}\right)$$

que l'on peut simplifier en regroupant les facteurs des masses

$$C_{\alpha\beta}(f_\alpha, f_\beta) = \frac{2c_{\alpha\beta}}{m_\alpha^2}\left(4\pi\frac{m_\alpha}{m_\beta} f_\beta(\underline{v}_\beta = \underline{v}_\alpha) f_\alpha\right. \tag{230}$$
$$\left. + \left(1 - \frac{m_\alpha}{m_\beta}\right)\frac{\partial h_\beta}{\partial \underline{v}_\alpha} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \underline{v}_\alpha} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_\beta}{\partial \underline{v}_\alpha \partial \underline{v}_\alpha} : \frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial \underline{v}_\alpha \partial \underline{v}_\alpha}\right)$$

4.5 Distributions isotropes

Le cas de fonction de disbrutions isotropes qui ne dépendent que du module de la vitesse est courant puisqu'il se rencontre chaque fois que le système étudié n'a pas de direction spatiale privilégieée.

$$\begin{aligned} f_\alpha(\underline{v}_\alpha) &= f_\alpha(v_\alpha) \\ f_\beta(\underline{v}_\beta) &= f_\beta(v_\beta) \end{aligned} \tag{231}$$

Dans cette situation les opérateurs de différentiation ont une forme particulière, en particulier on rencontrera

$$\frac{\partial}{\partial \underline{v}} \rightarrow \frac{\partial v}{\partial \underline{v}}\frac{\partial}{\partial v} = \frac{\underline{v}}{v}\frac{\partial}{\partial v} \tag{232}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\underline{v}\partial\underline{v}} \rightarrow \frac{\partial}{\partial\underline{v}}\left(\frac{\underline{v}}{v}\frac{\partial}{\partial v}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial\underline{v}}\left(\frac{\underline{v}}{v}\right)\frac{\partial}{\partial v} + \frac{\underline{v}\,\underline{v}}{v\,v}\frac{\partial^2}{\partial v^2}\right) \tag{233}$$

$$= \left(\frac{\underline{\underline{1}}}{v} - \frac{\underline{v}}{v^2}\underline{v}\right)\frac{\partial}{\partial v} + \frac{\underline{v}\,\underline{v}}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial v^2} = \frac{v^2\underline{\underline{1}} - \underline{v}\,\underline{v}}{v^3}\frac{\partial}{\partial v} + \frac{\underline{v}\,\underline{v}}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial v^2}$$

Ces deux opérateurs permettent d'écrire d'une part

$$\frac{\partial h_\beta}{\partial\underline{v}_\alpha}\cdot\frac{\partial f_\alpha}{\partial\underline{v}_\alpha} \rightarrow \frac{\underline{v}_\alpha}{v_\alpha}\frac{\partial h_\beta}{\partial v_\alpha}\cdot\frac{\underline{v}_\alpha}{v_\alpha}\frac{\partial f_\alpha}{\partial v_\alpha} = \frac{\partial h_\beta}{\partial v_\alpha}\frac{\partial f_\alpha}{\partial v_\alpha} \tag{234}$$

et d'autre part

$$\frac{\partial^2 g_\beta}{\partial\underline{v}_\alpha\partial\underline{v}_\alpha} : \frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial\underline{v}_\alpha\partial\underline{v}_\alpha} \rightarrow \left(\frac{v_\alpha^2\underline{\underline{1}} - \underline{v}_\alpha\underline{v}_\alpha}{v_\alpha^3}\frac{\partial g_\beta}{\partial v} + \frac{\underline{v}_\alpha\underline{v}_\alpha}{v_\alpha^2}\frac{\partial^2 g_\beta}{\partial {v_\alpha}^2}\right) \tag{235}$$

$$: \left(\frac{v_\alpha^2\underline{\underline{1}} - \underline{v}_\alpha\underline{v}_\alpha}{v_\alpha^3}\frac{\partial f_\alpha}{\partial v} + \frac{\underline{v}_\alpha\underline{v}_\alpha}{v_\alpha^2}\frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial {v_\alpha}^2}\right)$$

expression dans laquelle les combinaisons suivantes apparaissent

$$\begin{aligned} \underline{v}_\alpha\underline{v}_\alpha : \underline{v}_\alpha\underline{v}_\alpha &= v_\alpha^4 \\ (v_\alpha^2\underline{\underline{1}} - \underline{v}_\alpha\underline{v}_\alpha) : \underline{v}_\alpha\underline{v}_\alpha &= v_\alpha^4 - v_\alpha^4 = 0 \\ (v_\alpha^2\underline{\underline{1}} - \underline{v}_\alpha\underline{v}_\alpha) : (v_\alpha^2\underline{\underline{1}} - \underline{v}_\alpha\underline{v}_\alpha) &= v_\alpha^4\underline{\underline{1}} : \underline{\underline{1}} - v_\alpha^4 - v_\alpha^4 + v_\alpha^4 = 2v_\alpha^4 \end{aligned} \tag{236}$$

et donc

$$\frac{\partial^2 g_\beta}{\partial\underline{v}_\alpha\partial\underline{v}_\alpha} : \frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial\underline{v}_\alpha\partial\underline{v}_\alpha} \rightarrow \frac{2}{v_\alpha^2}\left(\frac{\partial g_\beta}{\partial v_\alpha}\frac{\partial f_\alpha}{\partial v_\alpha} + \frac{\partial^2 g_\beta}{\partial {v_\alpha}^2}\frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial {v_\alpha}^2}\right) \tag{237}$$

Opérateur de collisions pour des fonctions de distribution isotropes

Ceci permet de formuler l'opérateur de collisions pour des fonctions de distribution isotropes

$$C_{\alpha\beta}(f_\alpha, f_\beta) = \frac{2c_{\alpha\beta}}{m_\alpha^2}\left(4\pi\frac{m_\alpha}{m_\beta}f_\beta(\underline{v}_\beta = \underline{v}_\alpha)f_\alpha\right. \tag{238}$$

$$\left. + \left(\left(1 - \frac{m_\alpha}{m_\beta}\right)\frac{\partial h_\beta}{\partial v_\alpha} + \frac{1}{v_\alpha^2}\frac{\partial g_\beta}{\partial v_\alpha}\right)\frac{\partial f_\alpha}{\partial v_\alpha} + \frac{1}{v_\alpha^2}\frac{\partial^2 g_\beta}{\partial {v_\alpha}^2}\frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial {v_\alpha}^2}\right)$$

Premier potentiel de Rosenbluth pour des fonctions de distribution isotropes

Il convient maintenant d'estimer les potentiels de Rosenbluth dans cette situation particulière. On définira d'abord un système de coordonnées sphériques $[v_\beta, \theta, \varphi]$ avec comme axe principal $\underline{v}_\alpha$ qui permet d'écrire

$$|\underline{v}_\alpha - \underline{v}_\beta| = (v_\beta^2 sin^2\theta + (v_\alpha - v_\beta cos\theta)^2)^{1/2} \quad (239)$$

Le premier potentiel de Rosenbluth prend alors la forme

$$h_\beta(\underline{v}_\alpha) \equiv \int \frac{f_\beta(\underline{v}_\beta)}{\left|\underline{v}_\alpha - \underline{v}_\beta\right|} d^3 v_\beta \tag{240}$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} \frac{f_\beta(v_\beta)}{\left(v_\beta^2 sin^2\theta + (v_\alpha - v_\beta cos\theta)^2\right)^{1/2}} v_\beta^2 sin\theta dv_\beta d\theta d\varphi$$

$$= 2\pi\int_0^{\infty} \frac{f_\beta(v_\beta)v_\beta^2}{(v_\alpha^2 + v_\beta^2)^{1/2}} \left(\int_0^{\pi} \frac{-dcos\theta}{\left(1 - \frac{2v_\alpha v_\beta cos\theta}{v_\alpha^2 + v_\beta^2}\right)^{1/2}} \right) dv_\beta$$

$$= 2\pi\int_0^{\infty} \frac{f_\beta(v_\beta)v_\beta^2}{(v_\alpha^2 + v_\beta^2)^{1/2}} \left(\int_1^{-1} \frac{-dt}{\left(1 - \frac{2v_\alpha v_\beta}{v_\alpha^2 + v_\beta^2} t\right)^{1/2}} \right) dv_\beta$$

$$= 2\pi\int_0^{\infty} \frac{f_\beta(v_\beta)v_\beta^2}{(v_\alpha^2 + v_\beta^2)^{1/2}} \frac{v_\alpha^2 + v_\beta^2}{v_\alpha v_\beta} \left(1 - \frac{2v_\alpha v_\beta}{v_\alpha^2 + v_\beta^2} t\right)^{1/2} \Bigg|_1^{-1} dv_\beta$$

$$= 2\pi\int_0^{\infty} f_\beta(v_\beta)\frac{v_\beta}{v_\alpha}\left(|v_\alpha + v_\beta| - |v_\alpha - v_\beta|\right)dv_\beta$$

$$= 2\pi\int_0^{\infty} f_\beta(v_\beta)\frac{v_\beta}{v_\alpha}\left(\begin{cases} 2v_\beta & v_\beta < v_\alpha \\ 2v_\alpha & v_\beta > v_\alpha \end{cases}\right)dv_\beta$$

$$= \frac{4\pi}{v_\alpha}\int_0^{v_\alpha} f_\beta(v_\beta)v_\beta^2 dv_\beta + 4\pi\int_{v_\alpha}^{\infty} f_\beta(v_\beta)v_\beta dv_\beta$$

Il faut encore dériver ce potentiel pour pouvoir l'utiliser dans l'opérateur de collisions. Par exemple cette dérivé intervient dans la friction dynamique des particules α sur les particules β

$$\begin{aligned}
\underline{A}_{\alpha\beta} &= -\frac{2c_{\alpha\beta}}{m_\alpha\mu_{\alpha\beta}}\frac{\partial h_\beta}{\partial \underline{v}_\alpha} \qquad (241)\\
&= -\frac{2c_{\alpha\beta}}{m_\alpha\mu_{\alpha\beta}}\frac{\underline{v}_\alpha}{v_\alpha}\frac{\partial}{\partial v_\alpha}\left(\frac{4\pi}{v_\alpha}\int_0^{v_\alpha} f_\beta(v_\beta)v_\beta^2 dv_\beta + 4\pi\int_{v_\alpha}^{\infty} f_\beta(v_\beta)v_\beta dv_\beta\right)\\
&= -\frac{2c_{\alpha\beta}}{m_\alpha\mu_{\alpha\beta}}\frac{\underline{v}_\alpha}{v_\alpha}\\
&\left(-\frac{4\pi}{v_\alpha^2}\int_0^{v_\alpha} f_\beta(v_\beta)v_\beta^2 dv_\beta + \frac{4\pi}{v_\alpha}f_\beta(v_\beta = v_\alpha)v_\alpha^2 - 4\pi f_\beta(v_\beta = v_\alpha)v_\alpha\right)\\
&= -\frac{2c_{\alpha\beta}}{m_\alpha\mu_{\alpha\beta}}\frac{\underline{v}_\alpha}{v_\alpha^3}\int_0^{v_\alpha} f_\beta(v_\beta)4\pi v_\beta^2 dv_\beta
\end{aligned}$$

Il est intéressant de noter que l'intégrale représente la densité de particules β ayant une vitesse inférieure à celle de la particule α et que seules celles-ci contribuent à la friction dynamique sur les particules α.

Deuxième potentiel de Rosenbluth pour des fonctions de distribution isotropes

Les mêmes opérations peuvent être appliquées au deuxième potentiel de Rosenbluth.

Problème 10. Calculer l'expression du deuxième potentiel de Rosenbluth $g_\beta(\underline{v}_\alpha) \equiv \int f_\beta\left|\underline{v}_\alpha - \underline{v}_\beta\right| d^3 v_\beta$ dans le cas de fonctions de distribution isotropes.

Des étapes analogues au cas du premier potentiel se présentent ainsi

$$g_\beta(\underline{v}_\alpha) \equiv \int f_\beta |\underline{v}_\alpha - \underline{v}_\beta| d^3 v_\beta \tag{242}$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} f_\beta (v_\beta^2 sin^2\theta + (v_\alpha - v_\beta cos\theta)^2)^{1/2} v_\beta^2 sin\theta dv_\beta d\theta d\varphi$$

$$= 2\pi$$

$$\int_0^{\infty} f_\beta(v_\beta)(v_\alpha^2 + v_\beta^2)^{1/2} v_\beta^2 \left(\int_0^{\pi}\left(1 - \frac{2v_\alpha v_\beta cos\theta}{v_\alpha^2 + v_\beta^2}\right)^{1/2}(-dcos\theta)\right) dv_\beta$$

$$= 2\pi\int_0^{\infty} f_\beta(v_\beta)(v_\alpha^2 + v_\beta^2)^{1/2} v_\beta^2 \left(\int_1^{-1}\left(1 - \frac{2v_\alpha v_\beta}{v_\alpha^2 + v_\beta^2}t\right)^{1/2}(-dt)\right) dv_\beta$$

$$= 2\pi\int_0^{\infty} f_\beta(v_\beta)(v_\alpha^2 + v_\beta^2)^{1/2} v_\beta^2 \frac{v_\alpha^2 + v_\beta^2}{3v_\alpha v_\beta}\left(1 - \frac{2v_\alpha v_\beta}{v_\alpha^2 + v_\beta^2}t\right)^{3/2}\Bigg|_1^{-1} dv_\beta$$

$$= \frac{2\pi}{3}\int_0^{\infty} f_\beta(v_\beta)(v_\alpha^2 + v_\beta^2)^{3/2}\frac{v_\beta}{v_\alpha}$$

$$\left(\left(1 + \frac{2v_\alpha v_\beta}{v_\alpha^2 + v_\beta^2}\right)^{3/2} - \left(1 - \frac{2v_\alpha v_\beta}{v_\alpha^2 + v_\beta^2}\right)^{3/2}\right) dv_\beta$$

$$= \frac{2\pi}{3}\int_0^{\infty} f_\beta(v_\beta)\frac{v_\beta}{v_\alpha}(|v_\alpha + v_\beta|^3 - |v_\alpha - v_\beta|^3) dv_\beta$$

$$= \frac{2\pi}{3}\left(\int_0^{\infty} f_\beta(v_\beta)\frac{v_\beta}{v_\alpha}\left(\begin{Bmatrix} 2v_\beta^3 + 6v_\alpha^2 v_\beta & v_\beta < v_\alpha \\ 2v_\alpha^3 + 6v_\alpha v_\beta^2 & v_\beta > v_\alpha \end{Bmatrix}\right) dv_\beta\right)$$

$$= \frac{4\pi}{3v_\alpha}\int_0^{v_\alpha} f_\beta(v_\beta) v_\beta^2 (v_\beta^2 + 3v_\alpha^2) dv_\beta + \frac{4\pi}{3}\int_{v_\alpha}^{\infty} f_\beta(v_\beta) v_\beta (v_\alpha^2 + 3v_\beta^2) dv_\beta$$

5. Propriétés de l’opérateur de collisions

L'équation de Fokker-Plancket et son opérateur de collisions possèdent plusieurs propriétés générales qui sont importantes en théorie du transport et qui toutes doivent être satisfaites pour tout système raisonnablement physique.

5.1 Conservation des particules

L’opérateur de collisions conserve le nombre de particules dans le plasma. C’est une propriété logique vu que les collisions coulombiennes n’ont pas la capacité de créer ou de détruire des particules. Encore faut-il vérifier que l’opérateur de collisions dérivé à travers quelques hypothèses et approximations ait retenu cette propriété.

La source de particules due aux interactions entre particules a été définie en dérivant les équations du modèle fluide

$$S_\alpha \equiv \sum_\beta \int C_{\alpha\beta} d\underline{v}_\alpha \tag{243}$$

qu’on peut exprimer au moyen de la forme de Landau de l’opérateur de collisions

$$S_\alpha = \sum_\beta \frac{c_{\alpha\beta}}{m_\alpha} \int \frac{\partial}{\partial \underline{v}_\alpha} \cdot \int \frac{u^2 \underline{\underline{1}} - \underline{u}\,\underline{u}}{u^3} \cdot \left(\frac{f_\beta}{m_\alpha} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \underline{v}_\alpha} - \frac{f_\alpha}{m_\beta} \frac{\partial f_\beta}{\partial \underline{v}_\beta} \right) d^3 v_\beta d\underline{v}_\alpha \tag{244}$$

L’intégrale sur $\underline{v}_\alpha$ peut être convertie en une intégrale de surface

$$S_\alpha = \sum_\beta \frac{c_{\alpha\beta}}{m_\alpha} \int \oint_{v_\alpha = \infty} \frac{u^2 \underline{\underline{1}} - \underline{u}\,\underline{u}}{u^3} \cdot \left(\frac{f_\beta}{m_\alpha} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \underline{v}_\alpha} - \frac{f_\alpha}{m_\beta} \frac{\partial f_\beta}{\partial \underline{v}_\beta} \right) \cdot d\underline{v}_\alpha d^3 v_\beta \tag{245}$$

qui s’annule car à la fois $f_\alpha(v_\alpha = \infty) = 0$ et $(\partial f_\alpha / \partial \underline{v}_\alpha)(v_\alpha = \infty) = 0$ pour des raisons déjà invoquées. On constate donc que

$$\int C_{\alpha\beta} d\underline{v}_\alpha = 0 \tag{246}$$

et que donc le nombre de particules est conservé par l’opérateur de collisions coulombiennes.

5.2 Conservation de l’impulsion

Lors de la dérivation de l’équation du mouvement pour le modèle fluide du plasma, l’effet de l’interaction entre particules entrait à travers la force de friction définie comme

$$\underline{R}_\alpha \equiv m_\alpha \int C_\alpha \tilde{\underline{v}}_\alpha d\underline{v}_\alpha \tag{247}$$

où $C_\alpha = \sum_\beta C_{\alpha\beta}$, $\tilde{\underline{v}}_\alpha \equiv \underline{v}_\alpha - \underline{u}_\alpha$ et $\underline{u}_\alpha \equiv \int \underline{v}_\alpha d\underline{v}_\alpha$. On peut donc reformuler la force de friction

$$\underline{R}_\alpha = m_\alpha \sum_\beta \int C_{\alpha\beta} \underline{v}_\alpha d\underline{v}_\alpha - m_\alpha \sum_\beta \underline{u}_\alpha \int C_{\alpha\beta} d\underline{v}_\alpha \tag{248}$$

dont on sait désormais que le deuxième terme est nul pour l'opérateur de collisions coulombiennes. Il conviendra donc de calculer

$$\underline{R}_{\alpha\beta} \equiv m_\alpha \int C_{\alpha\beta} \underline{v}_\alpha d\underline{v}_\alpha \tag{249}$$

Problème 11. Montrer en utilisant la forme de Landau de l'opérateur de collisions et en remplaçant $\alpha \leftrightarrow \beta$ et $\underline{v}_\alpha \leftrightarrow \underline{v}_\beta$ que $\underline{R}_{\alpha\beta} = -\underline{R}_{\beta\alpha}$, $\underline{R}_{\alpha\alpha} = 0$ et que $\sum_{\alpha,\beta} \underline{R}_{\alpha\beta} = 0$.

En introduisant la deuxième forme de Landau dans la définition de $\underline{R}_{\alpha\beta}$ on obtient

$$\underline{R}_{\alpha\beta} = c_{\alpha\beta} \int \left(\frac{\partial}{\partial \underline{v}_\alpha} \cdot \int f_\alpha f_\beta \frac{u^2 \underline{\underline{1}} - \underline{u}\underline{u}}{u^3} \cdot \underline{\chi}_{\alpha\beta} d^3 v_\beta \right) \underline{v}_\alpha d\underline{v}_\alpha \tag{250}$$

L'intégrale sur $\underline{v}_\alpha$ peut être effectuée par parties

$$\left(\frac{\partial}{\partial \underline{v}_\alpha} \cdot \int f_\alpha f_\beta \frac{u^2 \underline{\underline{1}} - \underline{u}\underline{u}}{u^3} \cdot \underline{\chi}_{\alpha\beta} d^3 v_\beta, \underline{v}_\alpha \right) \tag{251}$$

$$\underline{R}_{\alpha\beta} = c_{\alpha\beta} \int \frac{\partial}{\partial \underline{v}_\alpha} \cdot \int f_\alpha f_\beta \frac{u^2 \underline{\underline{1}} - \underline{u}\underline{u}}{u^3} \cdot \underline{\chi}_{\alpha\beta} \underline{v}_\alpha d^3 v_\beta d\underline{v}_\alpha \tag{252}$$
$$- c_{\alpha\beta} \int\int f_\alpha f_\beta \frac{u^2 \underline{\underline{1}} - \underline{u}\underline{u}}{u^3} \cdot \underline{\chi}_{\alpha\beta} \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{v}_\alpha} \underline{v}_\alpha d^3 v_\beta d\underline{v}_\alpha$$

Dans le deuxième terme $(\partial / \partial \underline{v}_\alpha) \underline{v}_\alpha = \underline{\underline{1}}$. Le premier se transforme en une intégrale de surface

$$\underline{R}_{\alpha\beta} = c_{\alpha\beta} \int \oint_{v_\alpha = \infty} f_\alpha f_\beta \frac{u^2 \underline{\underline{1}} - \underline{u}\underline{u}}{u^3} \cdot \underline{\chi}_{\alpha\beta} \underline{v}_\alpha d^3 v_\beta \cdot d\underline{v}_\alpha \tag{253}$$
$$- c_{\alpha\beta} \int\int f_\alpha f_\beta \frac{u^2 \underline{\underline{1}} - \underline{u}\underline{u}}{u^3} \cdot \underline{\chi}_{\alpha\beta} d^3 v_\beta d\underline{v}_\alpha$$

Cette intégrale s'annule car $f_\alpha(v_\alpha = \infty) = 0$ si bien que

$$\underline{R}_{\alpha\beta} = -c_{\alpha\beta}\int\int f_\alpha f_\beta \frac{u^2\underline{\underline{1}} - \underline{u}\underline{u}}{u^3} \cdot \underline{\chi}_{\alpha\beta} d^3 v_\beta d\underline{v}_\alpha \tag{254}$$

En appliquant les échanges de symétrie $\alpha \leftrightarrow \beta$, on note

$$c_{\alpha\beta} \to c_{\beta\alpha} = c_{\alpha\beta} \tag{255}$$

$$\begin{aligned} &\frac{u^2\underline{\underline{1}} - \underline{u}\underline{u}}{u^3} \\ &= \frac{\underline{\underline{1}}}{u} - \frac{(\underline{v}_\alpha - \underline{v}_\beta)(\underline{v}_\alpha - \underline{v}_\beta)}{u^3} \to \frac{\underline{\underline{1}}}{u} - \frac{(\underline{v}_\alpha - \underline{v}_\beta)(\underline{v}_\alpha - \underline{v}_\beta)}{u^3} \\ &= \frac{u^2\underline{\underline{1}} - \underline{u}\underline{u}}{u^3} \end{aligned} \tag{256}$$

$$\underline{\chi}_{\alpha\beta} = \frac{\partial ln f_\alpha}{m_\alpha \partial \underline{v}_\alpha} - \frac{\partial ln f_\beta}{m_\beta \partial \underline{v}_\beta} \to \underline{\chi}_{\beta\alpha} = \frac{\partial ln f_\beta}{m_\beta \partial \underline{v}_\beta} - \frac{\partial ln f_\alpha}{m_\alpha \partial \underline{v}_\alpha} = -\underline{\chi}_{\alpha\beta} \tag{257}$$

Dans l'expression de $\underline{R}_{\alpha\beta}$ cette échange donne

$$\underline{R}_{\beta\alpha} = -c_{\alpha\beta}\int\int f_\alpha f_\beta \frac{u^2\underline{\underline{1}} - \underline{u}\underline{u}}{u^3} \cdot (-\underline{\chi}_{\alpha\beta}) d^3 v_\beta d\underline{v}_\alpha \tag{258}$$

Si bien que

$$\underline{R}_{\beta\alpha} = -\underline{R}_{\alpha\beta} \tag{259}$$

En particulier

$$\underline{R}_{\alpha\alpha} = -\underline{R}_{\alpha\alpha} = 0 \tag{260}$$

Finalement

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha,\beta} \underline{R}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}\Big(\sum_{\alpha,\beta} \underline{R}_{\alpha\beta} + \sum_{\beta,\alpha} \underline{R}_{\beta\alpha}\Big) = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta}(\underline{R}_{\alpha\beta} + \underline{R}_{\beta\alpha}) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta}(\underline{R}_{\alpha\beta} - \underline{R}_{\alpha\beta}) = 0 \end{aligned} \tag{261}$$

En conclusion on relève que la signification du résultat

$$\sum_{\alpha,\beta} \underline{R}_{\alpha\beta} = 0 \qquad (262)$$

signifie que la force de friction totale sur l'ensemble des particules est nulle et qu'en conséquence l'opérateur de collisions de modifie pas la quantité de mouvement du système.

5.3 Positivité de la fonction de distribution

Si f_α est initialement positive, alors elle ne peut pas devenir négative. En effet si f_α initialement positive devient à un certain temps négative, il doit y avoir un temps où sa valeur minimum est 0. En ce point $\underline{v}_o$ les conditions suivantes sont remplies. D'abord

$$f_\alpha(\underline{v}_o) = 0 \qquad (263)$$

Ensuite où f_α est minimum

$$\left.\frac{\partial f_\alpha}{\partial \underline{v}_\alpha}\right)_{\underline{v}_o} = 0 \qquad (264)$$

et

$$\left.\frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial \underline{v}_\alpha \partial \underline{v}_\alpha}\right)_{\underline{v}_o} \qquad (265)$$

est un tenseur défini positif de manière à ce que f_α présente bien un minimum et non un maximum ou un point selle. Finalement

$$\left.\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}\right)_{\underline{v}_o} < 0 \qquad (266)$$

Près du point $\underline{v}_o$ la fonction f_α peut être approximée par son développement de Taylor du deuxième ordre

$$f_\alpha(\underline{v}_\alpha) \cong \frac{1}{2}(\underline{v}_\alpha - \underline{v}_0) \cdot \left.\frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial \underline{v}_\alpha \partial \underline{v}_\alpha}\right)_{\underline{v}_o} \cdot (\underline{v}_\alpha - \underline{v}_0) \qquad (267)$$

En utilisant cette approximation dans la forme de Landau de l'opérateur de collisions

$$C_{\alpha\beta} = \frac{c_{\alpha\beta}}{m_\alpha} \frac{\partial}{\partial \underline{v}_\alpha} \cdot \int \frac{u^2 \underline{\underline{1}} - \underline{u}\,\underline{u}}{u^3} \cdot \left(\frac{f_\beta}{m_\alpha} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \underline{v}_\alpha} - \frac{f_\alpha}{m_\beta} \frac{\partial f_\beta}{\partial \underline{v}_\beta} \right) d^3 v_\beta \qquad (268)$$

on remarque que le tenseur s'approxime par

$$\frac{u^2\underline{\underline{1}} - \underline{u}\,\underline{u}}{u^3} = \frac{u_o^2\underline{\underline{1}} - \underline{u}_o\underline{u}_o}{u_o^3} + O(\underline{v}_\alpha - \underline{v}_0) \tag{269}$$

où

$$\underline{u}_o = \underline{v}_o - \underline{v}_\beta \tag{270}$$

Le premier terme est du premier ordre en $\underline{v}_\alpha - \underline{v}_0$

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial \underline{v}_\alpha} f_\beta = \left.\frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial \underline{v}_\alpha \partial \underline{v}_\alpha}\right)_{\underline{v}_o} \cdot (\underline{v}_\alpha - \underline{v}_0) f_\beta \tag{271}$$

Le deuxième terme contenant f_α est nul au premier ordre en $\underline{v}_\alpha - \underline{v}_0$.

On ne retiendra donc dans l'intégrale que les termes au premier ordre

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = \sum_\beta C_{\alpha\beta} \tag{272}$$

$$= \sum_\beta \frac{c_{\alpha\beta}}{m_\alpha^2} \frac{\partial}{\partial \underline{v}_\alpha} \cdot \int \frac{u_o^2\underline{\underline{1}} - \underline{u}_o\underline{u}_o}{u_o^3} \cdot \left(\frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial \underline{v}_\alpha \partial \underline{v}_\alpha}\right)_{\underline{v}_o} \cdot (\underline{v}_\alpha - \underline{v}_o) f_\beta(\underline{v}_\beta) d^3 v_\beta$$

dans lequelle on effectuera plus facilement la dérivé en explicitant les produits vectoriels

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = \sum_\beta \frac{c_{\alpha\beta}}{m_\alpha^2} \tag{273}$$

$$\sum_{i,j,k} \frac{\partial}{\partial v_{\alpha i}} \int \left[\frac{u_o^2\underline{\underline{1}} - \underline{u}_o\underline{u}_o}{u_o^3}\right]_{ij} \left[\left(\frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial \underline{v}_\alpha \partial \underline{v}_\alpha}\right)_{\underline{v}_o}\right]_{jk} (v_{\alpha k} - v_{ok}) f_\beta(\underline{v}_\beta) d^3 v_\beta$$

$$= \sum_\beta \frac{c_{\alpha\beta}}{m_\alpha^2} \sum_{i,j} \int \left[\frac{u_o^2\underline{\underline{1}} - \underline{u}_o\underline{u}_o}{u_o^3}\right]_{ij} \left[\left(\frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial \underline{v}_\alpha \partial \underline{v}_\alpha}\right)_{\underline{v}_o}\right]_{ji} f_\beta(\underline{v}_\beta) d^3 v_\beta$$

qu'on notera

$$\left.\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}\right)_{\underline{v}_o} = \sum_\beta \frac{c_{\alpha\beta}}{m_\alpha^2}\int \frac{u_o^2\underline{\underline{1}} - \underline{u}_o\underline{u}_o}{u_o^3} : \left.\frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial \underline{v}_\alpha \partial \underline{v}_\alpha}\right)_{\underline{v}_o} f_\beta d^3 v_\beta \tag{274}$$

En choisissant les vecteurs orthonormés $\hat{e}_1 = \underline{u}_o/u_o$ et $\hat{e}_2$, $\hat{e}_3$ les deux autres directions perpendiculaires, on peut écrire

$$\frac{u_o^2\underline{\underline{1}} - \underline{u}_o\underline{u}_o}{u_o^3} = \frac{1}{u_o}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{\hat{e}_2\hat{e}_2 + \hat{e}_3\hat{e}_3}{u_o} \tag{275}$$

si bien que

$$\left.\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}\right)_{\underline{v}_o} = \sum_b \frac{c_{\alpha\beta}}{m_\alpha^2}\int \left.\left(\frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial v_{\alpha 2}^2} + \frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial v_{\alpha 3}^2}\right)\right)_{\underline{v}_o} \frac{f_\beta}{u_o} d^3 v_\beta > 0 \tag{276}$$

qui est positif à cause de la positivité de $\partial^2 f_\alpha/(\partial \underline{v}_\alpha \partial \underline{v}_\alpha)$ en $\underline{v}_o$, en contradiction avec les hypothèses.. Donc au point $\underline{v}_o$ les collisions ont tendance à remplir le trou qui se serait formé.

5.4 Théorème H

Le fait que l'équation de Fokker-Planck décrit une évolution irréversible peut être établi en démontrant que l'entropie du système sous l'effet des collisions augmente. La densité d'entropie est définie par

$$s = -\sum_\alpha \int f_\alpha \, ln f_\alpha d^3 v_\alpha \tag{277}$$

En différenciant cette définition

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\sum_\alpha \int \left(ln f_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t}\right) d^3 v_\alpha \tag{278}$$

dont le deuxième terme s'intègre à zéro par conservation des particules

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\sum_\alpha \int ln f_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} d^3 v_\alpha \tag{279}$$

En introduisant la forme de Landau de l'opérateur de Fokker-Planck

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\sum_{\alpha\beta} \frac{c_{\alpha\beta}}{m_\alpha}\int ln f_\alpha \frac{\partial}{\partial \underline{v}_\alpha} \cdot \int f_\alpha f_\beta \frac{u^2\underline{\underline{1}} - \underline{u}\underline{u}}{u^3} \cdot \underline{\chi}_{\alpha\beta}(\underline{v}_\alpha, v_\beta) d^3 v_\beta d^3 v_\alpha \tag{280}$$

En intégrant par parties sur $d^3 v_\alpha$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\sum_{\alpha\beta} \frac{c_{\alpha\beta}}{m_\alpha}\left(\oint_{v_\alpha = \infty} \underline{d}^2 v_\alpha \cdot lnf_\alpha f_\alpha \int f_\beta \frac{u^2 \underline{\underline{1}} - \underline{u}\underline{u}}{u^3} \cdot \underline{\chi}_{\alpha\beta} d^3 v_\beta \right. \tag{281}$$
$$\left. - \int \frac{\partial lnf_\alpha}{\partial \underline{v}_\alpha} d^3 v_\alpha \cdot \int f_\alpha f_\beta \frac{u^2 \underline{\underline{1}} - \underline{u}\underline{u}}{u^3} \cdot \underline{\chi}_{\alpha\beta} d^3 v_\beta \right)$$

Le premier terme s'annule, car $f_\alpha(v_\alpha = \infty) = 0$ et il reste donc

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \sum_{\alpha\beta} \frac{c_{\alpha\beta}}{m_\alpha} \int f_\alpha f_\beta \frac{\partial lnf_\alpha}{\partial \underline{v}_\alpha} \cdot \frac{u^2 \underline{\underline{1}} - \underline{u}\underline{u}}{u^3} \cdot \underline{\chi}_{\alpha\beta} d^3 v_\alpha d^3 v_\beta \tag{282}$$

Les échanges de symétrie $\alpha \leftrightarrow \beta$ dans l'expression de $\frac{\partial s}{\partial t}$ donne

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \sum_{\beta\alpha} \frac{c_{\alpha\beta}}{m_\beta} \int f_\alpha f_\beta \frac{\partial lnf_\beta}{\partial \underline{v}_\beta} \cdot \frac{u^2 \underline{\underline{1}} - \underline{u}\underline{u}}{u^3} \cdot (-\underline{\chi}_{\alpha\beta}) d^3 v_\beta d^3 v_\alpha \tag{283}$$

qui sommé avec l'expression d'origine permet d'écrire la forme quadratique intégrée

$$2\frac{\partial s}{\partial t} = \sum_{\alpha\beta} c_{\alpha\beta} \int f_\alpha f_\beta \left(\frac{\partial lnf_\alpha}{m_\alpha \partial \underline{v}_\alpha} - \frac{\partial lnf_\beta}{m_\beta \partial \underline{v}_\beta} \right) \cdot \frac{u^2 \underline{\underline{1}} - \underline{u}\underline{u}}{u^3} \cdot \underline{\chi}_{\alpha\beta} d^3 v_\alpha d^3 v_\beta \tag{284}$$

ou

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} c_{\alpha\beta} \int f_\alpha f_\beta \underline{\chi}_{\alpha\beta} \cdot \frac{u^2 \underline{\underline{1}} - \underline{u}\underline{u}}{u^3} \cdot \underline{\chi}_{\alpha\beta} d^3 v_\alpha d^3 v_\beta \tag{285}$$

L'intégrant est toujours positif. En effet

$$\underline{\chi}_{\alpha\beta} \cdot \frac{u^2 \underline{\underline{1}} - \underline{u}\underline{u}}{u^3} \cdot \underline{\chi}_{\alpha\beta} = \frac{\underline{\chi}_{\alpha\beta} \cdot \underline{\underline{1}} \cdot \underline{\chi}_{\alpha\beta}}{u} - \frac{(\underline{\chi}_{\alpha\beta} \cdot \underline{u})(\underline{\chi}_{\alpha\beta} \cdot \underline{u})}{u^3} \tag{286}$$
$$= \frac{\chi_{\alpha\beta}^2}{u} - \frac{(\underline{\chi}_{\alpha\beta} \cdot \underline{u})^2}{u^3} \geq 0$$

car $\underline{\chi}_{\alpha\beta} \cdot \underline{u} \leq \chi_{\alpha\beta} u$

Ainsi est démontré le fait que l'entropie augmente sous l'effet des collisions coulombiennes.

5.5 Solution stationnaire, distribution maxwellienne

Il s'agit maintenant de chercher pour quelle forme de fonction de distribution cette entropie reste constante, traduisant un état stationnaire. Cette condition est atteinte lorsque $\underline{\chi}_{\alpha\beta}$ est strictement parallèle à $\underline{u}$, auquel cas on peut écrire

$$\underline{\chi}_{\alpha\beta}(\underline{v}_\alpha, \underline{v}_\beta) = \frac{\partial ln f_\alpha}{m_\alpha \partial \underline{v}_\alpha} - \frac{\partial ln f_\beta}{m_\beta \partial \underline{v}_\beta} = -B(\underline{v}_\alpha, \underline{v}_\beta)(\underline{v}_\alpha - \underline{v}_\beta) \qquad (287)$$

où B est une fonction scalaire. En prenant le rotationel de cette quantité et en se souvenant que $\partial/\partial\underline{v}_\alpha \times \partial/\partial\underline{v}_\alpha$ est identiquement zéro, on obtient à gauche

$$\frac{\partial}{\partial \underline{v}_\alpha} \times \underline{\chi}_{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial \underline{v}_\alpha} \times \frac{\partial ln f_\alpha}{m_\alpha \partial \underline{v}_\alpha} = \left(\frac{\partial}{\partial \underline{v}_\alpha} \times \frac{\partial}{\partial \underline{v}_\alpha}\right) \frac{ln f_\alpha}{m_\alpha} = 0 \qquad (288)$$

et à droite

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial}{\partial \underline{v}_\alpha} \times (B(\underline{v}_\alpha, \underline{v}_\beta)(\underline{v}_\alpha - \underline{v}_\beta)) \\ & = -\frac{\partial B}{\partial \underline{v}_\alpha} \times (\underline{v}_\alpha - \underline{v}_\beta) - B\frac{\partial}{\partial \underline{v}_\alpha} \times (\underline{v}_\alpha - \underline{v}_\beta) \end{aligned} \qquad (289)$$

Le second terme est nul, et en conséquence

$$\frac{\partial B}{\partial \underline{u}} \times (\underline{v}_\alpha - \underline{v}_\beta) = 0 \qquad (290)$$

ou encore

$$\frac{\partial B}{\partial \underline{u}} \frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{v}_\alpha} \times \underline{u} = \frac{\partial B}{\partial \underline{u}} \times \underline{u} = 0 \qquad (291)$$

Il en découle que le gradient de B selon $\underline{u}$ est parallèle à $\underline{u}$ et donc que B est une fonction du module de $\underline{u}$, $B(u)$

$$\frac{\partial B(u)}{\partial \underline{u}} \times \underline{u} = B'(u)\frac{\partial u}{\partial \underline{u}} \times \underline{u} = B'(u)\frac{\underline{u}}{u} \times \underline{u} = 0 \qquad (292)$$

En exprimant $\underline{\chi}_{\alpha\beta}$ alternativement pour $\underline{v}_\beta = 0$ puis $\underline{v}_\alpha = 0$

$$\underline{\chi}_{\alpha\beta}(\underline{v}_\alpha, 0) = \left.\frac{\partial ln f_\alpha}{m_\alpha \partial \underline{v}_\alpha} - \frac{\partial ln f_\beta}{m_\beta \partial \underline{v}_\beta}\right)_0 = -B(v_\alpha)\underline{v}_\alpha \qquad (293)$$

$$\underline{\chi}_{\alpha\beta}(0, \underline{v}_\beta) = \left.\frac{\partial ln f_\alpha}{m_\alpha \partial \underline{v}_\alpha}\right)_0 - \frac{\partial ln f_\beta}{m_\beta \partial \underline{v}_\beta} = -B(v_\beta)(-\underline{v}_\beta) \qquad (294)$$

puis en sommant ces deux égalités il sort

$$\frac{\partial ln f_\alpha}{m_\alpha \partial \underline{v}_\alpha} - \frac{\partial ln f_\beta}{m_\beta \partial \underline{v}_\beta} + \left.\frac{\partial ln f_\alpha}{m_\alpha \partial \underline{v}_\alpha}\right)_0 - \left.\frac{\partial ln f_\beta}{m_\beta \partial \underline{v}_\beta}\right)_0 = -B(v_\alpha)\underline{v}_\alpha + B(v_\beta)\underline{v}_\beta \qquad (295)$$

soit

$$-B(|\underline{v}_\alpha - \underline{v}_\beta|)(\underline{v}_\alpha - \underline{v}_\beta) + \left.\frac{\partial ln f_\alpha}{m_\alpha \partial \underline{v}_\alpha}\right)_0 - \left.\frac{\partial ln f_\beta}{m_\beta \partial \underline{v}_\beta}\right)_0 \qquad (296)$$

$$= -B(v_\alpha)\underline{v}_\alpha + B(v_\beta)\underline{v}_\beta$$

En particulier pour $\underline{v}_\alpha = \underline{v}_0$ et $\underline{v}_\beta = -\underline{v}_0$

$$-B(2v_o)2\underline{v}_o + \left.\frac{\partial ln f_\alpha}{m_\alpha \partial \underline{v}_\alpha}\right)_0 - \left.\frac{\partial ln f_\beta}{m_\beta \partial \underline{v}_\beta}\right)_0 = -B(v_o)\underline{v}_o + B(v_o)(\underline{-v}_o) \qquad (297)$$

Pour que cette relation soit satisfaite pour tout $\underline{v}_0$, il est nécessaire que $B(u)$ soit strictement constante, posée égale à $1/T$, et que

$$\left.\frac{\partial ln f_\alpha}{m_\alpha \partial \underline{v}_\alpha}\right)_0 - \left.\frac{\partial ln f_\beta}{m_\beta \partial \underline{v}_\beta}\right)_0 = 0 \qquad (298)$$

qui, en introduisant la constante $\underline{u}_0/T$ devient

$$\left.\frac{\partial ln f_\alpha}{m_\alpha \partial \underline{v}_\alpha}\right)_0 = \left.\frac{\partial ln f_\beta}{m_\beta \partial \underline{v}_\beta}\right)_0 = \frac{\underline{u}_o}{T} \qquad (299)$$

En revenant à l'expression de pour $\underline{\chi}_{\alpha\beta}$ pour $\underline{v}_\beta = 0$ et $\underline{v}_\alpha = 0$ et en y introduisant ces nouveaux résultats

$$\left.\frac{\partial ln f_\alpha}{m_\alpha \partial \underline{v}_\alpha}\right)_0 = -\frac{1}{T}(\underline{v}_\alpha - \underline{u}_o) \qquad (300)$$

$$\left.\frac{\partial ln f_\beta}{m_\beta \partial \underline{v}_\beta}\right)_0 = -\frac{1}{T}(\underline{v}_\beta - \underline{u}_o) \qquad (301)$$

dont la solution est

$$f_{\alpha}(\underline{v}_{\alpha}) \sim exp\left(-\frac{m_{\alpha}(\underline{v}_{\alpha} - \underline{u}_{o})^{2}}{2T}\right) \tag{302}$$

$$f_{\beta}(\underline{v}_{\beta}) \sim exp\left(-\frac{m_{\beta}(\underline{v}_{\beta} - \underline{u}_{o})^{2}}{2T}\right) \tag{303}$$

Ainsi donc l'unique solution stationnaire de l'équation de Fokker-Planck est une distribution de Maxwell avec pour toutes les espèces du plasma une température égale T, ainsi qu'une vitesse moyenne égale $\underline{u}_{o}$.

6. Temps de relaxation macroscopique

Dans un plasma formé de deux espèces de particules qui ne sont pas en équilibre thermodynamique, les collisions poussent leur fonction de distribution à évoluer vers une distribution maxwellienne. Une estimation du temps pris pour atteindre cet état d'équilibre peut être calculée en donnant à chaque espèce une distribution maxwellienne de température et de vitesse moyenne différente et en explicitant l'opérateur de collisions pour ces fonctions de distributions. Il s'agit là d'une approximation car il faudrait en toute rigueur résoudre l'équation de Fokker-Planck pour obtenir la distortion des fonctions de distribution par rapport à la maxwellienne.

6.1 Temps de relaxation de l'impulsion

Le taux de variation de l'impulsion des particules α peut être définie comme la variation temporelle de l'intégrale sur toutes les vitesses de l'impulsion de chaque particule

$$\underline{F}_{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial t}\int d^3 v_\alpha m_\alpha \underline{v}_\alpha f_\alpha \tag{304}$$

Lorsque cette variation est due aux collisions, on obtient la force de friction introduite dans le modèle fluide

$$\underline{R}_{\alpha\beta} \equiv m_\alpha \int C_{\alpha\beta} \underline{v}_\alpha d\underline{v}_\alpha \tag{305}$$

On a tenu compte ici de la propriété de conservation des particules de l'opérateur de collisions. En introduisant l'opérateur de collisions en termes de friction dynamique et de diffusion dans l'espace des vitesses

$$\underline{R}_{\alpha\beta} = -\int d^3 v_\alpha m_\alpha \underline{v}_\alpha \frac{\partial}{\partial \underline{v}_\alpha} \cdot \left(\underline{A}_{\alpha\beta} f_\alpha - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \underline{v}_\alpha} \cdot (\underline{\underline{D}}_{\alpha\beta} f_\alpha)\right) \tag{306}$$

En intégrant par parties

$$\begin{aligned}\underline{R}_{\alpha\beta} = &- \oint_{v_\alpha = \infty} d^2 \underline{v}_\alpha \cdot m_\alpha \underline{v}_\alpha \cdot \left(\underline{A}_{\alpha\beta} f_\alpha - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \underline{v}_\alpha} \cdot (\underline{\underline{D}}_{\alpha\beta} f_\alpha)\right) \\ &+ \int d^3 v_\alpha m_\alpha \left(\underline{A}_{\alpha\beta} f_\alpha - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \underline{v}_\alpha} \cdot (\underline{\underline{D}}_{\alpha\beta} f_\alpha)\right)\end{aligned} \tag{307}$$

Le premier terme s'annule, car $f_\alpha(v_\alpha = \infty) = 0$

$$\underline{R}_{\alpha\beta} = \int d^3 v_\alpha m_\alpha \underline{A}_{\alpha\beta} f_\alpha - \frac{1}{2} \oint_{v_o = \infty} d^2 \underline{v}_\alpha \cdot \underline{\underline{D}}_{\alpha\beta} f_\alpha \tag{308}$$

Il en est de même pour le terme de diffusion et il reste

$$\underline{R}_{\alpha\beta} = \int d^3 v_\alpha m_\alpha \underline{A}_{\alpha\beta} f_\alpha \tag{309}$$

que l'on pourra exprimer en utilisant le premier potentiel de Rosenbluth

$$\underline{R}_{\alpha\beta} = \frac{2c_{\alpha\beta}}{\mu_{\alpha\beta}} \int \frac{\partial}{\partial \underline{v}_\alpha} h_\beta(\underline{v}_\alpha) f_\alpha d^3 v_\alpha \tag{310}$$

La vitesse moyenne des particules β est égale à $\underline{u}_\beta$ et la fonction de distribution de ces dernières est donc

$$f_\beta^M = n_\beta \left(\frac{b_\beta}{\sqrt{\pi}}\right)^3 e^{-b_\beta^2 (\underline{v}_\beta - \underline{u}_\beta)^2} \tag{311}$$

avec $b_\beta^2 = m_\beta/(2T_\beta)$. La substitution dans le potentiel de Rosenbluth donne

$$h_\beta^M(\underline{v}_\alpha) = n_\beta \left(\frac{b_\beta}{\sqrt{\pi}}\right)^3 \int d^3 v_\beta \frac{e^{-b_\beta^2 (\underline{v}_\beta - \underline{u}_\beta)^2}}{\left|\underline{v}_\alpha - \underline{v}_\beta\right|} \tag{312}$$

En substituant $\underline{x} \leftarrow b_\beta(\underline{v}_\beta - \underline{u}_\beta)$

$$h_\beta^M(\underline{v}_\alpha) = n_\beta \frac{b_\beta}{\sqrt{\pi^3}} \int d^3 x \frac{e^{x^2}}{\left|\underline{x} - b_\beta(\underline{v}_\alpha - \underline{u}_\beta)\right|} \tag{313}$$

On peut utiliser l'intégrale définie

$$\int d^3 x \frac{e^{-x^2}}{\left|\underline{x} - \underline{y}\right|} = \sqrt{\pi}^3 \frac{\phi(y)}{y} \tag{314}$$

où

$$\phi(y) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-x^2} dx \tag{315}$$

pour obtenir

$$h_\beta^M(\underline{v}_\alpha) = n_\beta \frac{\phi(b_\beta \left|\underline{v}_\alpha - \underline{u}_\beta\right|)}{\left|\underline{v}_\alpha - \underline{u}_\beta\right|} \tag{316}$$

Freinage d'un faisceau par un plasma

Problème 12. Calculer la variation d'impulsion dans le cas de particules α formant un faisceau mono-énergétique avec une fonction de distribution $f_\alpha = n_\alpha \delta(\underline{v}_\alpha - \underline{u}_\alpha)$ et en fixant $\underline{u}_\beta = 0$.

La variation d'impulsion en introduisant le potentiel de Rosenbluth et la fonction de distribution devient

$$\underline{R}_{\alpha\beta} = \frac{2c_{\alpha\beta}n_\alpha n_\beta}{\mu_{\alpha\beta}} \int \frac{\partial}{\partial \underline{v}_\alpha} \frac{\phi(b_\beta v_\alpha)}{v_\alpha} \delta(\underline{v}_\alpha - \underline{u}_\alpha) d^3 v_\alpha \tag{317}$$

qui s'exprime aisément

$$\begin{aligned} \underline{R}_{\alpha\beta} &= \frac{2c_{\alpha\beta}n_\alpha n_\beta}{\mu_{\alpha\beta}} \int \frac{\underline{v}_\alpha}{v_\alpha} \frac{\partial}{\partial v_\alpha} \frac{\phi(b_\beta v_\alpha)}{v_\alpha} \delta(\underline{v}_\alpha - \underline{u}_\alpha) d^3 v_\alpha \\ &= \frac{2c_{\alpha\beta}n_\alpha n_\beta}{\mu_{\alpha\beta}} \int \frac{\underline{v}_\alpha}{v_\alpha^3} (b_\beta v_\alpha \phi'(b_\beta v_\alpha) - \phi(b_\beta v_\alpha)) \delta(\underline{v}_\alpha - \underline{u}_\alpha) d^3 v_\alpha \\ &= -\frac{2c_{\alpha\beta}n_\alpha n_\beta}{\mu_{\alpha\beta}} \frac{\phi(b_\beta u_\alpha) - b_\beta v_\alpha \phi'(b_\beta u_\alpha)}{u_\alpha^3} \underline{u}_\alpha \end{aligned} \tag{318}$$

De cette expression on peut tirer un temps de freinage caractéristique défini par

$$\underline{R}_{\alpha\beta} = -\nu^{||}_{\alpha\beta} n_\alpha m_\alpha \underline{u}_o \tag{319}$$

donc

$$\nu^{||}_{\alpha\beta} = \frac{2c_{\alpha\beta}n_\beta}{m_\alpha \mu_{\alpha\beta}} \frac{\phi(b_\beta u_\alpha) - b_\beta v_\alpha \phi'(b_\beta u_\alpha)}{u_\alpha^3} \tag{320}$$

ou en introduisant les paramètres physiques

$$\nu^{||}_{\alpha\beta} = \frac{1}{8\sqrt{2}\pi} \frac{e_\alpha^2 e_\beta^2 ln\Lambda m_\beta^{1/2}}{\varepsilon_o^2} \frac{m_\beta^{1/2}}{m_\alpha}\left(1 + \frac{m_\beta}{m_\alpha}\right) \frac{n_\beta}{T_\beta^{3/2}} \frac{\phi(b_\beta u_o) - b_\beta u_o \phi'(b_\beta u_o)}{(b_\beta u_o)^3} \tag{321}$$

Calcul phénoméno-logique de la résistivité électrique

Problème 13. On suppose être en présence d'un plasma d'électrons et de ions, ces deux espèces étant à une température proche l'une de l'autre, et un champ électrique homogène. Dans le repère des électrons, leur fonction de distribution est supposée être une maxwellienne. La fonction de distribution des ions est beaucoup plus étroite à cause de leur masse et on la représentera par une fonction de Dirac. Résoudre de moment $m_i \underline{v}_i$ de l'équation de Fokker-Planck pour les ions et en tirer la résistivité électrique. Pour les vitesses v_i faibles comparées à la vitesse thermique des électrons on pourra utiliser un développement de Taylor du terme de collisions.

Les fonctions de distribution considérées sont pour les électrons

$$f_e = n_e\left(\frac{b_e}{\sqrt{\pi}}\right)^3 e^{-b_e^2 v_e^2} \tag{322}$$

et pour les ions

$$f_i = n_i \delta(\underline{v}_i - \underline{u}_i) \tag{323}$$

Avec les hypothèses évoquées l'équation de Fokker-Planck pour les ions s'écrit

$$\frac{e_i}{m_i}\underline{E} \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{v}_i} f_i = C_{ie}(f_i, f_e) + C_{ii}(f_i, f_i) \tag{324}$$

dont le moment $m_i \underline{v}_i$ est

$$e_i \underline{E} \cdot \int \frac{\partial}{\partial \underline{v}_i} f_i \underline{v}_i d\underline{v}_i = \left(\int (C_{ie}(f_i, f_e) + C_{ii}(f_i, f_i)) m_i \underline{v}_i\right) d\underline{v}_i \tag{325}$$

Le membre de gauche s'intègre par parties $\left(\frac{\partial}{\partial \underline{v}_i} f_i, \underline{v}_i\right)$

$$\int \frac{\partial}{\partial \underline{v}_i} f_i \underline{v}_i d\underline{v}_i = \oint_{v_i = \infty} f_i \underline{v}_i \cdot d\underline{v}_i - \int f_i d\underline{v}_i = -n_i \tag{326}$$

Le terme de droite est fait des deux forces de frictions $\underline{R}_{ie} \equiv \int C_{ie}(f_i, f_e) m_i \underline{v}_i d\underline{v}_i$ et $\underline{R}_{ii} \equiv \int C_{ii}(f_i, f_i) m_i \underline{v}_i d\underline{v}_i$. On a déjà démontré que la seconde est nulle, une des propriétés de conservation du mouvement de l'opérateur de collisions. On vient de calculer le premier

$$\underline{R}_{ie} = -\nu_{ie}^{||} n_i m_i \underline{u}_i \tag{327}$$

De l'équation de Fokker-Planck il reste donc

$$-e_i n_i E = -\nu_{ie}^{||} m_i \underline{u}_i \tag{328}$$

qui en définissant la résistivité du plasma dans la loi d'Ohm

$$\underline{E} = \eta_{||} e_i n_i \underline{u}_i \tag{329}$$

permet de tirer la résistivité

$$\eta_{||} = \frac{m_i \nu_{ie}^{||}}{e_i^2 n_i} = \frac{2c_{ie}}{e_i^2 \mu_{ei}} \frac{n_e}{n_i} \frac{\phi(b_e u_i) - b_e u_i \phi'(b_e u_i)}{u_i^3} \tag{330}$$

Pour les petites valeurs de $b_e u_i$ correspondant à un petit champ électrique ou à des électrons très chauds, l'approximation suivante suffit $\phi(b_e u_i) - b_e u_i \phi'(b_e u_i) \cong 4 b_e^3 u_i^3 / (3\sqrt{\pi})$. En introduisant les paramètres physiques et $e_i = -Ze$, la résistivité devient

$$\eta_{||} = \frac{Ze^2 m_e^{1/2} \ln\Lambda}{3\sqrt{2\pi}^3 \varepsilon_o^2 T_e^{3/2}} \tag{331}$$

Si l'on cherche une solution valable quelque soit le paramètre $b_e u_i$, il convient de résoudre

$$E = \eta_{||} e_i n_i u_i = \frac{n_e Z e^3 \ln\Lambda b_e^2}{4\pi\varepsilon_o^2 m_e} \frac{\phi(b_e u_i) - b_e u_i \phi'(b_e u_i)}{b_e^2 u_i^2} \tag{332}$$

Toutefois la fonction $(\phi(b_e u_i) - b_e u_i \phi'(b_e u_i)) / b_e^2 u_i^2$ présente un maximum qui vaut environ 0.43. Cette équation n'a donc de solution que pour un champ électrique inférieur à un champ critique

$$E < 0.43 \frac{n_e Z e^3 \ln\Lambda}{8\pi\varepsilon_o^2 T_e} \equiv E_{cr} \tag{333}$$

Ainsi si un champ électrique supérieur à cette valeur critique est appliqué, les collisions coulombiennes de pourront plus freiner les électrons et le courant électrique va diverger jusqu'à ce que d'autres effets entrent jeu.

Il est important de relever que cette approche est approximative et purement phénoménologique. En effet elle est basée sur des fonctions de distribution données à priori et l'équation de Fokker-Planck n'a pas été résolue dans ce développement.

Freinage d'une plasma par un plasma

Pour un plasma la distribution des particules α est une distribution maxwellienne avec une vitesse moyenne $\underline{u}_\alpha$

$$f_\alpha^M = n_\alpha \left(\frac{b_\alpha}{\sqrt{\pi}}\right)^3 e^{-b_\alpha^2 (\underline{v}_\alpha - \underline{u}_\alpha)^2} \tag{334}$$

Introduite dans l'expression du taux de transfert de l'impulsion

$$\underline{R}_{\alpha\beta} = 2\frac{c_{\alpha\beta}}{\mu_{\alpha\beta}} n_\alpha n_\beta \left(\frac{b_\alpha}{\sqrt{\pi}}\right)^3 \int d^3 v_\alpha e^{-b_\alpha^2 (\underline{v}_\alpha - \underline{u}_\alpha)^2} \frac{\partial}{\partial \underline{v}_\alpha} \frac{\phi(b_\beta |\underline{v}_\alpha - \underline{u}_\beta|)}{|\underline{v}_\alpha - \underline{u}_\beta|} \quad (335)$$

En utilisant la variable d'intégration $\underline{v} = \underline{v}_\alpha - \underline{u}_\beta$

$$\underline{R}_{\alpha\beta} = 2\frac{c_{\alpha\beta}}{\mu_{\alpha\beta}} n_\alpha n_\beta \left(\frac{b_\alpha}{\sqrt{\pi}}\right)^3 \int d^3 v e^{-b_\alpha^2 (\underline{v} + \underline{u}_\beta - \underline{u}_\alpha)^2} \frac{\partial}{\partial \underline{v}} \frac{\phi(b_\beta v)}{v} \quad (336)$$

Dans l'hypothèse où $b_\alpha |\underline{u}_\alpha - \underline{u}_\beta| \ll 1$, on peut développer en série de Taylor en ce paramètre

$$\underline{R}_{\alpha\beta} = 2\frac{c_{\alpha\beta}}{\mu_{\alpha\beta}} n_\alpha n_\beta \left(\frac{b_\alpha}{\sqrt{\pi}}\right)^3 \quad (337)$$
$$\int d^3 v e^{-b_\alpha^2 v^2} (1 - 2b_\alpha^2 \underline{v} \cdot (\underline{u}_\beta - \underline{u}_\alpha)) \frac{\partial}{\partial v} \frac{\phi(b_\beta v)}{v}$$

Clairement en échangeant $\underline{v} \leftrightarrow -\underline{v}$, on doit également changer $\partial/\partial \underline{v} \leftrightarrow -\partial/\partial \underline{v}$ et l'intégrale du premier terme faite sur tout l'espace de vitesses s'annule.

$$\underline{R}_{\alpha\beta} = -4\frac{c_{\alpha\beta}}{\mu_{\alpha\beta}} n_\alpha n_\beta \left(\frac{b_\alpha}{\sqrt{\pi}}\right)^3 \int d^3 v b_\alpha^2 e^{-b_\alpha^2 v^2} \frac{\partial}{\partial \underline{v}} \frac{\phi(b_\beta v)}{v} \underline{v} \cdot (\underline{u}_\beta - \underline{u}_\alpha) \quad (338)$$

En explicitant le gradient

$$\frac{\partial}{\partial \underline{v}} \frac{\phi(b_\beta v)}{v} = \left(b_\beta \phi'(b_\beta v) - \frac{\phi(b_\beta v)}{v}\right) \frac{\underline{v}}{v^2} \quad (339)$$

il apparaît $\underline{v}\underline{v} \cdot (\underline{u}_\beta - \underline{u}_\alpha)$. En choisissant $\hat{e}_1$ selon $\underline{u}_\beta - \underline{u}_\alpha$ et $\hat{e}_2$, $\hat{e}_3$ dans les deux autres directions orthogonales, ceci se simplifie

$$(v_1^2 + v_2 v_1 + v_3 v_1) |\underline{u}_\beta - \underline{u}_\alpha| \quad (340)$$

En échangeant $\hat{e}_2$ par $-\hat{e}_2$ et $\hat{e}_3$ par $-\hat{e}_3$, le seul terme à ne pas changer de signe et donc à contribuer à l'intégrale est le premier, en introduisant le facteur $v_x^2/v^2 = 1/3$

$$\underline{R}_{\alpha\beta} = \frac{4}{3}\frac{c_{\alpha\beta}}{\mu_{\alpha\beta}} n_\alpha n_\beta \left(\frac{b_\alpha}{\sqrt{\pi}}\right)^3 \quad (341)$$
$$\left(\int d^3 v b_\alpha^2 e^{-b_\alpha^2 v^2} \left(\frac{\phi(b_\beta v)}{v} - b_\beta \phi'(b_\beta v)\right)\right) (\underline{u}_\beta - \underline{u}_\alpha)$$

Les relations suivantes apparaissent

$$\left(\frac{b_\alpha}{\sqrt{\pi}}\right)^3 \int d^3 v e^{-b_\alpha^2 v^2} \frac{\phi(b_\beta v)}{v} \tag{342}$$

En utilisant l'anisotropie de l'intégrant $d^3 v = 4\pi v^2 dv$

$$\frac{4b_\alpha^3}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-b_\alpha^2 v^2} \phi(b_\beta v) v dv \tag{343}$$

la variable d'intégration $x = b_\beta v$

$$\frac{4b_\alpha^3}{\sqrt{\pi} b_\beta^2} \int_0^\infty e^{-(b_\alpha^2 / b_\beta^2) x^2} \phi(x) x dx \tag{344}$$

et la définition de ϕ

$$\frac{8b_\alpha^3}{\pi b_\beta^2} \int_0^\infty e^{-(b_\alpha^2 / b_\beta^2) x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt dx \tag{345}$$

En intégrant par parties

$$-\frac{4b_\alpha}{\pi} \int_0^\infty \frac{d}{dx}\left(e^{-(b_\alpha^2 / b_\beta^2) x^2}\right) \int_0^x e^{-t^2} dt dx \tag{346}$$

on obtient

$$\frac{4b_\alpha}{\pi}\left(\int_0^\infty e^{-(b_\alpha^2 / b_\beta^2) x^2} e^{-x^2} dx - \left(e^{-(b_\alpha^2 / b_\beta^2) x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt\right)_{x=0}^{x=\infty}\right) \tag{347}$$

dont le deuxième terme est nul et le premier peut être évalué au moyen de

$$\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \tag{348}$$

$$\left(\frac{b_\alpha}{\sqrt{\pi}}\right)^3 \int d^3 v e^{-b_\alpha^2 v^2} \frac{\phi(b_\beta v)}{v} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{b_\alpha b_\beta}{\sqrt{b_\alpha^2 + b_\beta^2}} \tag{349}$$

La deuxième relation à déterminer est

$$\left(\frac{b_\alpha}{\sqrt{\pi}}\right)^3 \int d^3 v e^{-b_\alpha^2 v} \phi'(b_\beta v) \tag{350}$$

En suivant les mêmes étapes, $d^3 v = 4\pi v^2 dv$

$$\frac{4b_\alpha^3}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-b_\alpha^2 v^2} \phi'(b_\beta v) v^2 dv \tag{351}$$

puis la définition de ϕ

$$\frac{8}{\pi} b_\alpha^3 \int_0^\infty e^{-(b_\alpha^2 + b_\beta^2) v^2} v^2 dv \tag{352}$$

puis en substituant $x = \sqrt{b_\alpha^2 + b_\beta^2} v$

$$\frac{8}{\pi} \frac{b_\alpha^3}{(b_\alpha^2 + b_\beta^2)^{3/2}} \int_0^\infty e^{-x^2} x^2 dx \tag{353}$$

puis en intégrant par parties

$$-\frac{4}{\pi} \frac{b_\alpha^3}{(b_\alpha^2 + b_\beta^2)^{3/2}} \int_0^\infty \frac{d}{dx}(e^{-x^2}) x dx \tag{354}$$

on obtient

$$\frac{4}{\pi} \frac{b_\alpha^3}{(b_\alpha^2 + b_\beta^2)^{3/2}} \left(\int_0^\infty e^{-x^2} dx - (e^{-x^2} x)_0^\infty \right) \tag{355}$$

et finalement

$$\left(\frac{b_\alpha}{\sqrt{\pi}}\right)^3 \int d^3 v e^{-b_\alpha^2 v} \phi'(b_\beta v) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{b_\alpha^3}{(b_\alpha^2 + b_\beta^2)^{3/2}} \tag{356}$$

En revenant à l'expression de $\underline{R}_{\alpha\beta}$

$$\underline{R}_{\alpha\beta} = \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \frac{c_{\alpha\beta}}{\mu_{\alpha\beta}} n_\alpha n_\beta \frac{b_\alpha^3 b_\beta^3}{(b_\alpha^2 + b_\beta^2)^{3/2}} (\underline{u}_\beta - \underline{u}_\alpha) \tag{357}$$

Taux de transfert de l'impulsion

On peut définir un taux caractéristique du transfert d'impulsion par collisions en écrivant

$$\underline{R}_{\alpha\beta} = -n_\alpha m_\beta(\underline{u}_\alpha - \underline{u}_\beta)\nu_{\alpha\beta} \tag{358}$$

donc

$$\nu_{\alpha\beta} = \frac{8}{3\sqrt{\pi}}\frac{c_{\alpha\beta}}{\mu_{\alpha\beta}m_\alpha}n_\beta\left(\frac{b_\alpha^2 b_\beta^2}{b_\alpha^2 + b_\beta^2}\right)^{3/2} \tag{359}$$

ou en l'exprimant en fonction des températures et des constantes physiques

$$\nu_{\alpha\beta} = \frac{1}{6\pi\sqrt{\pi}}\frac{e_\alpha^2 e_\beta^2 \ln\Lambda}{\varepsilon_o^2}\frac{m_\alpha + m_\beta}{m_\alpha^2 m_\beta}n_\beta\left(\frac{T_\alpha}{m_\alpha} + \frac{T_\beta}{m_\beta}\right)^{-3/2} \tag{360}$$

6.2 Temps d'équipartition de l'énergie

L'échange d'énergie cinétique entre la population de particules β et α est défini comme la variation de l'énergie cinétique des particules α intégrée sur toutes les vitesses et décomptée de l'énergie cinétique associée à la vitesse moyenne $\underline{u}_\alpha$

$$Q_{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial t}\int d^3 v_\alpha \frac{m_\alpha}{2}(\underline{v}_\alpha - \underline{u}_\alpha)^2 f_\alpha \tag{361}$$

qui devient en introduisant l'opérateur de collisions en termes de friction dynamique et de diffusion dans l'espace des vitesses

$$Q_{\alpha\beta} = -\int d^3 v_\alpha \frac{m_\alpha}{2}(\underline{v}_\alpha - \underline{u}_\alpha)^2 \frac{\partial}{\partial \underline{v}_\alpha}\cdot\left(\underline{A}_{\alpha\beta}f_\alpha - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \underline{v}_\alpha}\cdot(\underline{\underline{D}}_{\alpha\beta}f_\alpha)\right) \tag{362}$$

En intégrant par parties

$$\begin{aligned} Q_{\alpha\beta} = &-\oint_{v_\alpha = \infty} d^2 \underline{v}_\alpha \cdot\left(\underline{A}_{\alpha\beta}f_\alpha - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \underline{v}_\alpha}\cdot(\underline{\underline{D}}_{\alpha\beta}f_\alpha)\right)\frac{m_\alpha}{2}(\underline{v}_\alpha - \underline{u}_\alpha)^2 \\ &+\int d^3 v_\alpha m_\alpha(\underline{v}_\alpha - \underline{u}_\alpha)\cdot\left(\underline{A}_{\alpha\beta}f_\alpha - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \underline{v}_\alpha}\cdot(\underline{\underline{D}}_{\alpha\beta}f_\alpha)\right) \end{aligned} \tag{363}$$

L'intégrale de surface s'annule car $f_\alpha(v_\alpha = \infty) = 0$; quant au deuxième terme de l'intégrale de volume, il peut à son tour être intégré par parties

$$Q_{\alpha\beta} = \int d^3 v_\alpha m_\alpha (\underline{v}_\alpha - \underline{u}_\alpha) \cdot \underline{A}_{\alpha\beta} f_\alpha \tag{364}$$

$$-\frac{1}{2} \oint_{v_\alpha = \infty} d^2 \underline{v}_\alpha \cdot m_\alpha (\underline{v}_\alpha - \underline{u}_\alpha) \cdot \underline{\underline{D}}_{\alpha\beta} f_\alpha + \frac{1}{2} \int d^3 v_\alpha m_\alpha \frac{\partial \underline{v}_\alpha}{\partial \underline{v}_\alpha} : \underline{\underline{D}}_{\alpha\beta} f_\alpha$$

A nouveau l'intégrale de surface s'annule et dans la dernière intégrale on remarque que

$$\frac{\partial \underline{v}_\alpha}{\partial \underline{v}_\alpha} : \underline{\underline{D}}_{\alpha\beta} = \underline{\underline{1}} : \underline{\underline{D}}_{\alpha\beta} = tr \underline{\underline{D}}_{\alpha\beta} \tag{365}$$

donc

$$Q_{\alpha\beta} = m_\alpha \int d^3 v_\alpha \left((\underline{v}_\alpha - \underline{u}_\alpha) \cdot \underline{A}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} tr \underline{\underline{D}}_{\alpha\beta} \right) f_\alpha \tag{366}$$

Les potentiels de Rosenbluth mènent à

$$\underline{A}_{\alpha\beta} = 2 \frac{c_{\alpha\beta}}{\mu_{\alpha\beta} m_\alpha} \frac{\partial h_\beta(\underline{v}_\alpha)}{\partial \underline{v}_\alpha} \tag{367}$$

$$\underline{\underline{D}}_{\alpha\beta} = 2 \frac{c_{\alpha\beta}}{m_\alpha^2} \frac{\partial^2 g_\beta(\underline{v}_\alpha)}{\partial \underline{v}_\alpha \partial \underline{v}_\alpha} \tag{368}$$

En particulier

$$\frac{1}{2} tr \underline{\underline{D}}_{\alpha\beta} = \frac{c_{\alpha\beta}}{m_\alpha^2} \frac{\partial}{\partial \underline{v}_\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{v}_\alpha} g_\beta(\underline{v}_\alpha) = 2 \frac{c_{\alpha\beta}}{m_\alpha^2} h_\beta(\underline{v}_\alpha) \tag{369}$$

Comme auparavant on prendra une distribution maxwellienne pour les particules β

$$f_\beta^M = n_\beta \left(\frac{b_\beta}{\sqrt{\pi}} \right)^3 e^{-b_\beta^2 v_\beta^2} \tag{370}$$

qui conduit à

$$h_\beta^M(\underline{v}_\alpha) = n_\beta \frac{\phi(b_\beta v_\alpha)}{v_\alpha} \tag{371}$$

Le transfert de l'énergie s'écrit donc

$$Q_{\alpha\beta} = 2c_{\alpha\beta}n_\beta\int d^3v_\alpha\left(\frac{\underline{v}_\alpha}{\mu_{\alpha\beta}}\cdot\frac{\partial}{\partial\underline{v}_\alpha}\frac{\phi(b_\beta v_\alpha)}{v_\alpha}+\frac{1}{m_\alpha}\frac{\phi(b_\beta v_\alpha)}{v_\alpha}\right)f_\alpha \tag{372}$$

Il faut noter que

$$\underline{v}_\alpha\cdot\frac{\partial}{\partial\underline{v}_\alpha}\frac{\phi(b_\beta v_\alpha)}{v_\alpha} = \frac{\underline{v}_\alpha\cdot\underline{v}_\alpha}{v_\alpha^2}\left(b_\beta\phi'(b_\beta v_\alpha)-\frac{\phi(b_\beta v_\alpha)}{v_\alpha}\right) \tag{373}$$

ainsi que

$$\frac{1}{\mu_{\alpha\beta}}-\frac{1}{m_\alpha} = \frac{1}{m_\beta} \tag{374}$$

pour réécrire

$$Q_{\alpha\beta} = 2c_{\alpha\beta}n_\beta\int d^3v_\alpha\left(\frac{b_\beta}{\mu_{\alpha\beta}}\phi'(b_\beta v_\alpha)-\frac{1}{m_\beta}\frac{\phi(b_\beta v_\alpha)}{v_\alpha}\right)f_\alpha \tag{375}$$

Thermalisation d'un faisceau par un plasma

Problème 14. En prenant les mêmes conditions que pour le freinage d'un faisceau par un plasma, calculer le temps caractéristique de thermalisation d'un faisceau.

La substitution de $f_\alpha = n_\alpha\delta(\underline{v}_\alpha-\underline{u}_\alpha)$ dans l'expression du transfert de l'énergie conduit à

$$\begin{aligned} Q_{\alpha\beta} & \qquad (376)\\ &= 2c_{\alpha\beta}n_\alpha n_\beta\int d^3v_\alpha\left(\frac{b_\beta}{\mu_{\alpha\beta}}\phi'(b_\beta v_\alpha)-\frac{1}{m_\beta}\frac{\phi(b_\beta v_\alpha)}{v_\alpha}\right)\delta(\underline{v}_\alpha-\underline{u}_\alpha)\\ &= 2c_{\alpha\beta}n_\alpha n_\beta\left(\frac{b_\beta}{\mu_{\alpha\beta}}\phi'(b_\beta u_\alpha)-\frac{1}{m_\beta}\frac{\phi(b_\beta u_\alpha)}{u_\alpha}\right)\end{aligned}$$

En définissant le taux caractéristique de variation de l'énergie cinétique du faisceau

$$Q_{\alpha\beta} = -\nu_{\alpha\beta}^{\varepsilon||}n_\alpha\frac{m_\alpha u_\alpha^2}{2} \tag{377}$$

on obtient

$$\nu_{\alpha\beta}^{\varepsilon||} = \frac{4c_{\alpha\beta}n_\beta b_\beta^3}{m_\alpha m_\beta}\left(\frac{\phi(b_\beta u_\alpha) - \frac{m_\beta}{\mu_{\alpha\beta}}b_\beta u_\alpha \phi'(b_\beta u_\alpha)}{b_\beta^3 u_\alpha^3}\right) \tag{378}$$

ou en introduisant les paramètres physique

$$\nu_{\alpha\beta}^{\varepsilon||} = \frac{e_\alpha^2 e_\beta^2 \ln\Lambda\, m_\beta^{1/2}}{4\sqrt{2}\pi\varepsilon_o^2}\frac{n_\beta}{m_\alpha}\frac{}{T_\beta^{3/2}}\left(\frac{\phi(b_\beta u_\alpha) - \left(1 + \frac{m_\beta}{m_\alpha}\right)b_\beta u_\alpha \phi'(b_\beta u_\alpha)}{b_\beta^3 u_\alpha^3}\right) \tag{379}$$

Il faut noter que cette quantité n'est pas toujours positive et que pour certaines valeurs du rapport de masse et du rapport entre la vitesse des particules du faisceau et de la vitesse thermique du plasma, elle peut être négative et traduire ainsi un transfert d'énergie du plasma vers le faisceau.

Collision de deux faisceaux ioniques

Problème 15. Il pourrait être tentant de réaliser des réactions de fusion au moyen de deux faisceaux de deutérons et de tritons. Calculer le taux de freinage des faisceaux et le taux de thermalisation et leur rapport avec le taux de réactions de fusion en prenant une énergie relative des deutérons optimale de $E_D = 100keV$ et une section efficace de fusion de $\sigma_{DT} = 5\times10^{-28} m^2$.

Pour les taux de freinage et de thermalisation, on imaginera que les tritons forment un plasma au repos de température nulle. Ainsi le taux de freinage est

$$\nu_{\alpha\beta}^{||} = \frac{2c_{\alpha\beta}n_\beta}{m_\alpha\mu_{\alpha\beta}}\frac{\phi(b_\beta u_\alpha) - b_\beta v_\alpha \phi'(b_\beta u_\alpha)}{u_\alpha^3} \tag{380}$$

que l'on estimera pour $b_\beta u_\alpha = \infty$ où $\phi(\infty) = 1$ et $\phi'(\infty) = 0$, soit en introduisnat les constantes physiques

$$\nu_{DT}^{||} = \frac{5}{48\pi}\frac{e^4 \ln\Lambda}{\varepsilon_o^2\sqrt{m_p}}\frac{n_T}{E_D^{3/2}} \tag{381}$$

Le taux de thermalisation n'est pas très différent puisque l'on a à faire avec des particules de masses semblables

$$\nu_{\alpha\beta}^{\varepsilon||} = \frac{2m_\alpha}{m_\alpha + m_\beta}\nu_{\alpha\beta}^{||} \tag{382}$$

donc

$$\nu_{DT}^{\varepsilon||} = \frac{4}{5}\nu_{DT}^{||} \tag{383}$$

Le taux de réactions de fusion est lui donné par

$$\nu_{DT} = n_T u_D \sigma_{DT} = \frac{\sigma_{DT}}{\sqrt{m_p}} n_T E_D^{1/2} \tag{384}$$

Le gain en énergie des réactions de fusion peut être exprimé par le rapport entre la puissance de fusion et la perte d'énergie des particules par collisions coulombiennes

$$\frac{\nu_{DT} Q_{DT}}{\nu_{DT}^{||} E_D} = \frac{48\pi\varepsilon_o^2 \sigma_{DT} E_D Q_{DT}}{5e^4 \ln\Lambda} = 5.4 \tag{385}$$

où $Q_{DT} = 17.6 MeV$ est l'énergie libérée par une réaction. Ce gain est plus grand que un; malheureusement en examinant le rapport du taux de fusion et du taux de freinage

$$\frac{\nu_{DT}}{\nu_{DT}^{||}} = \frac{48\pi\varepsilon_o^2 \sigma_{DT} E_D^2}{5e^4 \ln\Lambda} = 0.03 \tag{386}$$

on constate que les particules sont freinées et défocalisées avant que ce gain puisse être atteint.

Thermalisation de deux plasmas

Pour les particules α, la fonction de distribution est dans le cas d'un plasma

$$f_\alpha^M = n_\alpha \left(\frac{b_\alpha}{\sqrt{\pi}}\right)^3 e^{-b_\alpha^2 v_\alpha^2} \tag{387}$$

Le transfert de l'énergie s'écrit

$$Q_{\alpha\beta} = 2c_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta \left(\frac{b_\alpha}{\sqrt{\pi}}\right)^3 \int d^3 v_\alpha \left(\frac{b_\beta}{\mu_{\alpha\beta}} \phi'(b_\beta v_\alpha) - \frac{1}{m_\beta} \frac{\phi(b_\beta v_\alpha)}{v_\alpha}\right) e^{-b_\alpha^2 v_\alpha^2} \tag{388}$$

qui fait apparaître les mêmes intégrales que plus haut, si bien que

$$Q_{\alpha\beta} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} c_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta \left(\frac{b_\beta}{\mu_{\alpha\beta}} \frac{b_\alpha^3}{(b_\alpha^2 + b_\beta^2)^{3/2}} - \frac{1}{m_\beta} \frac{b_\alpha b_\beta}{(b_\alpha^2 + b_\beta^2)^{1/2}}\right) \tag{389}$$

qu'on peut transformer en

$$Q_{\alpha\beta} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\frac{c_{\alpha\beta}}{m_\alpha m_\beta}n_\alpha n_\beta\left(\frac{b_\alpha^2 b_\beta^2}{b_\alpha^2 + b_\beta^2}\right)^{3/2}\left(\frac{m_\beta}{b_\beta^2} - \frac{m_\alpha}{b_\alpha^2}\right) \tag{390}$$

ou en termes de température $T_\alpha = m_\alpha/(2b_\alpha^2)$ et $T_\beta = m_\beta/(2b_\beta^2)$

$$Q_{\alpha\beta} = \frac{4}{\sqrt{2\pi}}\frac{c_{\alpha\beta}}{m_\alpha m_\beta}n_\alpha n_\beta\left(\frac{T_\alpha}{m_\alpha} + \frac{T_\beta}{m_\beta}\right)^{-3/2}(T_\beta - T_\alpha) \tag{391}$$

Taux d'équipartition de l'énergie

On peut définir un taux d'équipartition comme

$$Q_{\alpha\beta} = \frac{3}{2}n_\alpha(T_\beta - T_\alpha)\nu_{\alpha\beta}^{\varepsilon} \tag{392}$$

avec

$$\nu_{\alpha\beta}^{\varepsilon} = \frac{8}{3\sqrt{2\pi}}\frac{c_{\alpha\beta}}{m_\alpha m_\beta}n_\beta\left(\frac{T_\alpha}{m_\alpha} + \frac{T_\beta}{m_\beta}\right)^{-3/2} \tag{393}$$

ou exprimé avec les constantes physiques

$$\nu_{\alpha\beta}^{\varepsilon} = \frac{1}{3\pi\sqrt{2\pi}}\frac{e_\alpha^2 e_\beta^2 \ln\Lambda}{\varepsilon_o^2}\frac{1}{m_\alpha m_\beta}n_\beta\left(\frac{T_\alpha}{m_\alpha} + \frac{T_\beta}{m_\beta}\right)^{-3/2} \tag{394}$$

A remarquer que

$$\nu_{\alpha\beta}^{\varepsilon} = \frac{2m_\alpha}{m_\alpha + m_\beta}\nu_{\alpha\beta} \tag{395}$$

6.3 Cas d'un plasma simple

Dans un plasma simple composé d'électrons et d'une seule espèce d'ions de charge Z, de manière à ce que $n_e = Zn_i$, en admettant la température des deux populations similaires, la proportionnalité suivante s'applique

$$\nu_{ei} : \nu_{ee}^{\varepsilon} : \nu_{ii}^{\varepsilon} : \nu_{ei}^{\varepsilon} = \frac{1}{2} : 1 : Z^3\left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2} : 2Z\frac{m_e}{m_i} \tag{396}$$

Ainsi l'équipartition entre électrons et ions est de loin la plus lente. Quant au transfert d'impulsion sur les électrons; c'est un processus rapide.

7. Processus de transport classique

Jusqu'à maintenant seules les situations où le plasma était homogène et où les particules ne subissaient aucune force ont été traitées. L'équation de Fokker-Planck se réduit ainsi à

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = \sum_\beta C_{\alpha\beta} \tag{397}$$

Pire encore, cette équation n'a pas été résolue et l'on s'est contenté d'évaluer le terme de collisions dans certaines situations données. Il est temps donc d'aborder des situations où l'on est en présence de variations spatiales imposées par exemple par des conditions au bord du volume de plasma considéré ou par des sources de particules ou d'énergie à l'intérieur du plasma, ainsi qu'en présence de force créée par un champ magnétique et électrique. Il faut alors revenir à l'équation de Fokker-Planck complète

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \underline{v}_\alpha \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \underline{x}_\alpha} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha}(\underline{E} + \underline{v}_\alpha \times \underline{B}) \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \underline{v}_\alpha} = \sum_\beta C_{\alpha\beta} \tag{398}$$

Ces gradients et ces forces, on le voit, conduiront à une déformation de la fonction de distribution qui à son tour engendrera des flux de particules, d'impulsion ou d'énergie.

7.1 Procédure de base

Ces processus de transport sont essentiellement locaux, c'est-à-dire qu'ils sont déterminés par le gradient ou la force présente environ au même endroit. Pour que ceci arrive, il faut que le libre parcours moyen entre collisions soit beaucoup plus petit que la longueur caractéristique des gradients. Il en est de même pour le rayon de gyration autour du champ magnétique. Quant au champ électrique, on considère que l'énergie qu'il apporte à la particule entre deux collisions est insignifiante par rapport à sa température.

Développement de la fonction de distribution

La petitesse de certains termes dans l'équation de Fokker-Planck peut être utilisée mathématiquement pour développer sa solution. Le paramètre de développement est

$$\varepsilon \sim \lambda \nabla_{||} \sim \rho \nabla_{\perp} \tag{399}$$

et le développement de la fonction de distribution

$$f_\alpha = f_{\alpha 0} + f_{\alpha 1} + f_{\alpha 2} + \dots \tag{400}$$

On cherche uniquement des solutions stationnaires ou alternativement en considérant la dérivée temporelle du deuxième ordre en ε.

7.2 Ordre zéro

Dans ces conditions l'équation de Fokker-Planck à l'ordre zéro est

$$\frac{e_\alpha}{m_\alpha}(\underline{E} + \underline{v}_\alpha \times \underline{B}) \cdot \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \underline{v}_\alpha} = \sum_\beta C_{\alpha\beta}(f_{\alpha 0}, f_{\beta 0}) \tag{401}$$

On peut chercher la solution de cette équation en se basant sur la définition de l'entropie,

$$s = \sum_\alpha \int d^3 v_\alpha \, ln f_\alpha f_\alpha \tag{402}$$

On multiplie donc l'équation de Fokker-Planck à l'ordre zéro par $ln\, f_{\alpha 0}$, on intègre sur les vitesses et somme sur toutes les espèces

$$\begin{aligned}&\sum_\alpha \frac{e_\alpha}{m_\alpha}\int d^3 v_\alpha \, ln\, f_{\alpha 0}(\underline{E} + \underline{v}_\alpha \times \underline{B}) \cdot \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \underline{v}_\alpha} \\ &= \sum_{\alpha\beta}\int d^3 v_\alpha \, ln\, f_{\alpha 0} C_{\alpha\beta}(f_{\alpha 0}, f_{\beta 0})\end{aligned} \tag{403}$$

En intégrant par parties le membre de gauche

$$\begin{aligned}&\sum_\alpha \frac{e_\alpha}{m_\alpha}\left(\oint_{v_\alpha = \infty} d^2 \underline{v}_\alpha \right.\\ &\left.\cdot (\underline{E} + \underline{v}_\alpha \times \underline{B})\, ln\, f_{\alpha 0} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \underline{v}_\alpha} - \int d^3 v_\alpha \frac{\partial}{\partial \underline{v}_\alpha} \cdot (ln\, f_{\alpha 0}(\underline{E} + \underline{v}_\alpha \times \underline{B}))\right)\end{aligned} \tag{404}$$

Le premier terme s'annule car $f_\alpha(v_\alpha = \infty) = 0$. Reste

$$-\sum_\alpha \frac{e_\alpha}{m_\alpha}\int d^3 v_\alpha \left(\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \underline{v}_\alpha} \cdot (\underline{E} + \underline{v}_\alpha \times \underline{B}) + f_{\alpha 0}\, ln\, f_{\alpha 0} \frac{\partial}{\partial \underline{v}_\alpha} \cdot (\underline{E} + \underline{v}_\alpha \times \underline{B})\right) \tag{405}$$

où $\partial / \partial \underline{v}_\alpha \cdot (\underline{E} + \underline{v}_\alpha \times \underline{B})$ est nul. La même manipulation sur le premier terme donne

$$-\sum_\alpha \frac{e_\alpha}{m_\alpha}\left(\oint_{v_\alpha = \infty} d^2 \underline{v}_\alpha \cdot (\underline{E} + \underline{v}_\alpha \times \underline{B}) f_{\alpha 0} - \int d^3 v_\alpha f_{\alpha 0} \frac{\partial}{\partial \underline{v}_\alpha} \cdot (\underline{E} + \underline{v}_\alpha \times \underline{B})\right) \tag{406}$$

qui s'annule aussi.

Equation de Fokker-Planck et solution à l'ordre zéro

Finalement il reste

$$\sum_{\alpha\beta} \int d^3 v_\alpha \, ln\, f_{\alpha 0} C_{\alpha\beta}(f_{\alpha\beta}, f_{\alpha 0}) = 0 \tag{407}$$

On se souvient de la démonstration du théorème H que

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\sum_{\alpha} \int d^3 v_\alpha \, ln\, f_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = -\sum_{\alpha\beta} \int f d^3 v_\alpha \, ln\, f_\alpha C_{\alpha\beta}(f_\alpha, f_\beta) \tag{408}$$

et que la variation d'entropie n'est nulle que si le système a atteint un équilibre où les fonctions de distribution de toutes les espèces sont des maxwelliennes de même température $T_\alpha = m_\alpha/(2b_\alpha^2) = T$

$$f_{\alpha 0} = n_\alpha \left(\frac{b_\alpha}{\sqrt{\pi}}\right)^3 e^{-b_\alpha^2 v_\alpha^2} \tag{409}$$

Ainsi à l'ordre zéro la présence du champ magnétique n'affecte pas l'état du système.

7.3 Premier ordre

Les termes du premier ordre dans le développement de l'opérateur de Fokker-Planck donnent

$$\begin{aligned} &\underline{v}_\alpha \cdot \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \underline{x}} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \underline{E} \cdot \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \underline{v}_\alpha} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} (\underline{v}_\alpha \times \underline{B}) \cdot \frac{\partial f_{\alpha 1}}{\partial \underline{v}_\alpha} \\ &= \sum_\beta (C_{\alpha\beta}(f_{\alpha 0}, f_{\beta 1}) + C_{\alpha\beta}(f_{\alpha 1}, f_{\beta 0})) \end{aligned} \tag{410}$$

Le premier terme peut se calculer en introduisant la distribution maxwellienne pour $f_{\alpha 0}$ avec une densité et une température variant dans l'espace

$$\underline{v}_\alpha \cdot \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \underline{x}} = \left(\frac{\nabla n_\alpha}{n_\alpha} + \frac{\nabla b_\alpha}{b_\alpha}(3 - 2b_\alpha^2 v_\alpha^2)\right) \cdot \underline{v}_\alpha f_{\alpha 0} \tag{411}$$

ou en terme de pression $p_\alpha = n_\alpha T_\alpha$ et de température

$$\underline{v}_\alpha \cdot \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \underline{x}} = \left(\frac{\nabla p_\alpha}{p_\alpha} + \left(b_\alpha^2 v_\alpha^2 - \frac{5}{2}\right)\frac{\nabla T_\alpha}{T_\alpha}\right) \cdot \underline{v}_\alpha f_{\alpha 0} \tag{412}$$

Le terme en $\underline{E}$ est trivial

$$\frac{e_\alpha}{m_\alpha}\underline{E} \cdot \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \underline{v}_\alpha} = -2\frac{e_\alpha}{m_\alpha}b_\alpha^2 \underline{E} \cdot \underline{v}_\alpha f_{\alpha 0} = -\frac{e_\alpha}{T_\alpha}\underline{E} \cdot \underline{v}_\alpha f_{\alpha 0} \tag{413}$$

Equation de Fokker-Planck au premier ordre

Il sort donc une équation pour le terme du premier ordre de la fonction de distribution pour chaque espèce

$$\sum_\beta (C_{\alpha\beta}(f_{\alpha 1}, f_{\beta 0}) + C_{\alpha\beta}(f_{\alpha 0}, f_{\beta 1})) - \frac{e_\alpha}{m_\alpha}(\underline{v}_\alpha \times \underline{B}) \cdot \frac{\partial f_{\alpha 1}}{\partial \underline{v}_\alpha} \tag{414}$$
$$= \left(\frac{\nabla p_\alpha}{p_\alpha} - \frac{e_\alpha}{m_\alpha}\underline{E} + \left(b_\alpha^2 v_\alpha^2 - \frac{5}{2}\right)\frac{\nabla T_\alpha}{T_\alpha}\right) \cdot \underline{v}_\alpha f_{\alpha 0}$$

La résolution de cette équation permet de connaître la distorsion des fonctions de distribution, d'estimer les flux qui en découlent et constitue ainsi le cœur du problème mathématique du transport classique.

Flux de particules au premier ordre

Ainsi, après avoir obtenu $f_{\alpha 1}$, on peut dériver le flux de particules au premier ordre

$$n_\alpha \underline{u}_{\alpha 1} = \int d^3 v_\alpha \underline{v}_\alpha f_{\alpha 1} \tag{415}$$

Flux de chaleur au premier ordre

Egalement le flux de chaleur hormis celui transporté par le mouvement de la masse

$$\underline{q}_\alpha = \int d^3 v_\alpha \frac{m_\alpha}{2}(\underline{v}_\alpha - \underline{u}_\alpha)^2 (\underline{v}_\alpha - \underline{u}_\alpha) f_\alpha \tag{416}$$

dont on peut extraire la composante du premier ordre

$$\underline{q}_{\alpha 1} = \int d^3 v_\alpha \frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2}\underline{v}_\alpha f_{\alpha 1} - \int d^3 v_\alpha \left(\frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2}\underline{u}_\alpha + m_\alpha \underline{v}_\alpha \cdot \underline{u}_\alpha \underline{v}_\alpha\right) f_{\alpha 0} \tag{417}$$

Des deux termes liés à $f_{\alpha 0}$, le premier s'intègre aisément

$$\underline{u}_\alpha \int d^3 v_\alpha \frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2} f_{\alpha 0} = \frac{3}{2} n_\alpha T_\alpha \underline{u}_\alpha \tag{418}$$

Quand au deuxième seul l'énergie cinétique dans la direction de $\underline{u}_\alpha$ y contribue si bien que

$$\underline{u}_\alpha \cdot \int d^3 v_\alpha m_\alpha \underline{v}_\alpha \underline{v}_\alpha f_{\alpha 0} = \underline{u}_\alpha \int d^3 v_\alpha m_\alpha v_{\alpha ||}^2 f_{\alpha 0} \tag{419}$$

où || signifie selon la direction de $\underline{u}_\alpha$. Comme $f_{\alpha 0}$ est isotrope

$$\int d^3v_\alpha m_\alpha v_{\alpha\|}^2 f_{\alpha 0} = \frac{1}{3}\int d^3v_\alpha m_\alpha v_\alpha^2 f_{\alpha 0} = n_\alpha T_\alpha \tag{420}$$

Finalement en utilisant l'expression pour $\underline{u}_{\alpha 1}$

$$\underline{q}_{\alpha 1} = \int d^3v_\alpha\left(\frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2} - \frac{5}{2}T_\alpha\right)\underline{v}_\alpha f_{\alpha 1} \tag{421}$$

7.4 Moments de l'équation de Fokker-Planck au premier ordre

Flux de particules

Pour le flux de particules, on prendra le moment $m_\alpha \underline{v}_\alpha$ de l'équation de Fokker-Planck au premier ordre

$$\begin{aligned}&\sum_\beta\int d^3v_\alpha m_\alpha \underline{v}_\alpha (C_{\alpha\beta}(f_{\alpha 1}, f_{\beta 0}) + C_{\alpha\beta}(f_{\alpha 0}, f_{\beta 1}))\\ &-\int d^3v_\alpha e_\alpha \underline{v}_\alpha(\underline{v}_\alpha \times \underline{B})\cdot\frac{\partial f_{\alpha 1}}{\partial \underline{v}_\alpha} = \left(\frac{\nabla p_\alpha}{p_\alpha} - \frac{e_\alpha}{m_\alpha}\underline{E} - \frac{5}{2}\frac{\nabla T_\alpha}{T_\alpha}\right)\\ &\cdot\int d^3v_\alpha m_\alpha \underline{v}_\alpha \underline{v}_\alpha f_{\alpha 0} + \frac{\nabla T_\alpha}{T_\alpha}\cdot\int d^3v_\alpha m_\alpha b_\alpha^2 v_\alpha^2 \underline{v}_\alpha \underline{v}_\alpha f_{\alpha 0}\end{aligned} \tag{422}$$

Le deuxième terme du membre de gauche s'intègre par parties pour faire apparaître le flux de particules au premier ordre,

$$\begin{aligned}&-\int d^3v_\alpha e_\alpha \underline{v}_\alpha(\underline{v}_\alpha \times \underline{B})\cdot\frac{\partial f_{\alpha 1}}{\partial \underline{v}_\alpha}\\ &= -\oint_{v_\alpha = \infty} d^2\underline{v}_\alpha\cdot(\underline{v}_\alpha(\underline{v}_\alpha \times \underline{B}))f_{\alpha 1}\\ &+\int d^3v_\alpha e_\alpha \frac{\partial}{\partial \underline{v}_\alpha}\cdot(\underline{v}_\alpha(\underline{v}_\alpha \times \underline{B}))f_{\alpha 1}\end{aligned} \tag{423}$$

qui en notant que la divergence du tenseur

$$\frac{\partial}{\partial \underline{v}_\alpha}\cdot(\underline{v}_\alpha(\underline{v}_\alpha \times \underline{B})) = \underline{v}_\alpha \times \underline{B} \tag{424}$$

devient

$$\int d^3v_\alpha e_\alpha \underline{v}_\alpha f_{\alpha 1} \times \underline{B} = e_\alpha n_\alpha \underline{u}_{\alpha 1} \times \underline{B} \tag{425}$$

Dans le premier terme du membre de droite, seul la composante de $\underline{v}_\alpha$ parallèle aux gradients ou au champ électrique contribue, donc

$$\left(\frac{\nabla p_\alpha}{p_\alpha} - \frac{e_\alpha}{m_\alpha}\underline{E} - \frac{5}{2}\frac{\nabla T_\alpha}{T_\alpha}\right) \cdot \int d^3 v_\alpha m_\alpha \underline{v}_\alpha \underline{v}_\alpha f_{\alpha 0} \tag{426}$$

$$= \left(\frac{\nabla p_\alpha}{p_\alpha} - \frac{e_\alpha}{T_\alpha}\underline{E} - \frac{5}{2}\frac{\nabla T_\alpha}{T_\alpha}\right) \int d^3 v_\alpha m_\alpha v_{\alpha||}^2 f_{\alpha 0}$$

Comme $f_{\alpha 0}$ est isotrope, ceci vaut

$$\left(\frac{\nabla p_\alpha}{p_\alpha} - \frac{e_\alpha}{T_\alpha}\underline{E} - \frac{5}{2}\frac{\nabla T_\alpha}{T_\alpha}\right) n_\alpha T_\alpha \tag{427}$$

Le même raisonnement s'applique au deuxième terme qui devient

$$\frac{\nabla T_\alpha}{T_\alpha} \cdot \int d^3 v_\alpha m_\alpha b_\alpha^2 v_\alpha^2 \underline{v}_\alpha \underline{v}_\alpha f_{\alpha 0} = \frac{\nabla T_\alpha}{T_\alpha} \int d^3 v_\alpha m_\alpha v_{\alpha||}^2 b_\alpha^2 v_\alpha^2 f_{\alpha 0} \tag{428}$$

L'intégrale peut être effectuée par parties

$$\int d^3 v_\alpha \frac{m_\alpha}{2} \frac{\partial}{\partial \underline{v}_\alpha} \cdot (\underline{v}_\alpha v_{\alpha||}^2) f_{\alpha 0} - \oint_{v_\alpha = \infty} d^2 \underline{v}_\alpha \cdot \frac{m_\alpha}{2} \underline{v}_\alpha v_{\alpha||}^2 f_{\alpha 0} \tag{429}$$

En notant que

$$\frac{\partial}{\partial \underline{v}_\alpha} \cdot (\underline{v}_\alpha v_{\alpha||}^2) = \frac{\partial}{\partial \underline{v}_\alpha} \cdot \underline{v}_\alpha v_{\alpha||}^2 + 2\underline{v}_\alpha \cdot \underline{v}_{\alpha||} = 3v_{\alpha||}^2 + 2v_{\alpha||}^2 \tag{430}$$

elle devient

$$\int d^3 v_\alpha \frac{5 m_\alpha v_{\alpha||}^2}{2} f_{\alpha 0} = \frac{5}{2} n_\alpha T_\alpha \tag{431}$$

Premier moment de l'équation de Fokker-Planck au premier ordre

Il reste donc du moment $m_\alpha \underline{v}_\alpha$ du premier ordre de l'équation de Fokker-Planck

$$\sum_\beta \int d^3 v_\alpha \tag{432}$$

$$m_\alpha \underline{v}_\alpha (C_{\alpha\beta}(f_{\alpha 1}, f_{\beta 0}) + C_{\alpha\beta}(f_{\alpha 0}, f_{\beta 1})) + e_\alpha n_\alpha \underline{u}_{\alpha 1} \times \underline{B}$$

$$= \nabla p_\alpha - e_\alpha n_\alpha \underline{E}$$

Flux de particules perpendiculaire

On peut extraire la composante perpendiculaire en la multipliant vectoriellement par $\underline{B}$

$$n_\alpha \underline{u}_{\alpha\perp} = n_\alpha \frac{\underline{E} \times \underline{B}}{B^2} + \frac{\underline{B}}{q_\alpha B^2} \times \left(\nabla p_\alpha - \sum_{\beta \neq \alpha} \underline{F}_{\alpha\beta 1}\right) \tag{433}$$

avec la définition de la force de friction au premier ordre

$$\underline{F}_{\alpha\beta 1} = \int d^3 v_\alpha m_\alpha \underline{v}_\alpha (C_{\alpha\beta}(f_{\alpha 1}, f_{\beta 0}) + C_{\alpha\beta}(f_{\alpha 0}, f_{\beta 1})) \tag{434}$$

Comme cette force est nulle pour les collisions entre particules de la même espèce, la somme a pu être restreinte à $\alpha \neq \beta$.

Flux de chaleur

Une expression analogue pour le flux d'énergie est obtenue en prenant le moment $m_\alpha \underline{v}_\alpha (b_\alpha^2 v_\alpha^2 - 5/2)$ de l'équation de Fokker-Planck au premier ordre

$$\begin{aligned} &\sum_\beta \int d^3 v_\alpha m_\alpha \underline{v}_\alpha \left(b_\alpha^2 v_\alpha^2 - \frac{5}{2}\right)(C_{\alpha\beta}(f_{\alpha 0}, f_{\beta 1}) + C_{\alpha\beta}(f_{\alpha 1}, f_{\beta 0})) \\ &- \int d^3 v_\alpha e_\alpha \underline{v}_\alpha \left(b_\alpha^2 v_\alpha^2 - \frac{5}{2}\right)(\underline{v}_\alpha \times \underline{B}) \cdot \frac{\partial f_{\alpha 1}}{\partial \underline{v}_\alpha} \\ &= \left(\frac{\nabla p_\alpha}{p_\alpha} - \frac{e_\alpha}{T_\alpha}\underline{E} - \frac{5}{2}\frac{\nabla T_\alpha}{T_\alpha}\right) \cdot \int d^3 v_\alpha m_\alpha \underline{v}_\alpha \underline{v}_\alpha \left(b_\alpha^2 v_\alpha^2 - \frac{5}{2}\right) f_{\alpha 0} \\ &+ \frac{\nabla T_\alpha}{T} \cdot \int d^3 v_\alpha m_\alpha b_\alpha^2 v_\alpha^2 \underline{v}_\alpha \underline{v}_\alpha \left(b_\alpha^2 v_\alpha^2 - \frac{5}{2}\right) f_{\alpha 0} \end{aligned} \tag{435}$$

Le deuxième terme du membre de gauche s'intègre par parties

$$\int d^3 v_\alpha e_\alpha \frac{\partial}{\partial \underline{v}_\alpha} \cdot \left(\left(b_\alpha^2 v_\alpha^2 - \frac{5}{2}\right) \underline{v}_\alpha (\underline{v}_\alpha \times \underline{B})\right) f_{\alpha 1} \tag{436}$$

La divergence apparaissant dans l'intégrant se développe comme suit:

$$2 b_\alpha^2 \underline{v}_\alpha \cdot (\underline{v}_\alpha (\underline{v}_\alpha \times \underline{B}_\alpha)) + \left(b_\alpha^2 v_\alpha^2 - \frac{5}{2}\right) \frac{\partial}{\partial \underline{v}_\alpha} \cdot (\underline{v}_\alpha (\underline{v}_\alpha \times \underline{B})) \tag{437}$$

dont le premier terme se transforme successivement en

$$\underline{v}_\alpha \cdot (\underline{v}_\alpha (\underline{v}_\alpha \times \underline{B})) = (\underline{v}_\alpha \underline{v}_\alpha) \cdot (\underline{v}_\alpha \times \underline{B}) = \underline{v}_\alpha (\underline{v}_\alpha \cdot (\underline{v}_\alpha \times \underline{B})) = 0 \tag{438}$$

et le deuxième est apparu plus haut. Il en découle que ce terme du moment de l'équation de Fokker-Planck vaut

$$\int d^3 v_\alpha e_\alpha \left(b_\alpha^2 v_\alpha^2 - \frac{5}{2}\right)(\underline{v}_\alpha \times \underline{B}) f_{\alpha 1} = \frac{e_\alpha}{T_\alpha} \underline{q}_{\alpha 1} \times \underline{B} \tag{439}$$

en ayant introduit la définition du flux d'énergie au premier ordre. L'intégrale du premier terme du membre de droite s'écrit au moyen de quantités déjà dérivées

$$\int d^3 v_\alpha m_\alpha v_{\alpha||}^2 \left(b_\alpha^2 v_\alpha^2 - \frac{5}{2}\right) f_{\alpha 0} = \frac{5}{2} n_\alpha T_\alpha - \frac{5}{2} n_\alpha T_\alpha = 0 \qquad (440)$$

Dnas l'intégrale du deuxième terme apparaît la quantité

$$\int d^3 v_\alpha m_\alpha v_{\alpha||}^2 b_\alpha^4 v_\alpha^4 f_{\alpha 0} \qquad (441)$$

qu'on intègre par parties

$$\int d^3 v_\alpha \frac{m_\alpha b_\alpha^2}{2} \frac{\partial}{\partial \underline{v}_\alpha} \cdot (v_{\alpha||}^2 v_\alpha^2 \underline{v}_\alpha) f_{\alpha 0} \qquad (442)$$

La divergence dans l'intégrant se développe comme suit

$$\frac{\partial}{\partial \underline{v}_\alpha} \cdot (v_{\alpha||}^2 v_\alpha^2 \underline{v}_\alpha) = 2\underline{v}_{\alpha||} v_\alpha^2 \cdot \underline{v}_\alpha + 2\underline{v}_\alpha \cdot v_{\alpha||}^2 \underline{v}_\alpha + \frac{\partial}{\partial \underline{v}_\alpha} \cdot \underline{v}_\alpha v_{\alpha||}^2 v_\alpha^2 \qquad (443)$$
$$= 2v_{\alpha||}^2 v_\alpha^2 + 2v_{\alpha||}^2 v_\alpha^2 + 3v_{\alpha||}^2 v_\alpha^2 = 7v_{\alpha||}^2 v_\alpha^2$$

Cette intégrale vaut donc

$$\frac{7}{2}\int d^3 v_\alpha m_\alpha b_\alpha^2 v_{\alpha||}^2 v_\alpha^2 f_{\alpha 0} = \frac{7}{2}\frac{5}{2} n_\alpha T_\alpha \qquad (444)$$

valeur qui permet d'écrire

$$\int d^3 v_\alpha m_\alpha b_\alpha^2 v_\alpha^2 \left(b_\alpha^2 v_\alpha^2 - \frac{5}{2}\right) v_{\alpha||}^2 f_{\alpha 0} = \frac{7}{2}\frac{5}{2} n_\alpha T_\alpha - \frac{5}{2}\frac{5}{2} n_\alpha T_\alpha \qquad (445)$$
$$= \frac{5}{2} n_\alpha T_\alpha$$

Deuxième moment de l'équation de Fokker-Planck au premier ordre

En définissant la friction associée à la chaleur comme

$$\underline{G}_{\alpha\beta} = \int d^3 v_\alpha m_\alpha \underline{v}_\alpha \left(b_\alpha^2 v_\alpha^2 - \frac{5}{2}\right)(C_{\alpha\beta}(f_{\alpha 0}, f_{\beta 1}) + C_{\alpha\beta}(f_{\alpha 1}, f_{\beta 0})) \qquad (446)$$

on peut écrire le moment $m_\alpha \underline{v}_\alpha (b_\alpha^2 v_\alpha^2 - 5/2)$ de l'équation de Fokker-Planck

$$\sum_{\beta} \underline{G}_{\alpha\beta} + \frac{e_\alpha}{T_\alpha} \underline{q}_{\alpha 1} \times \underline{B} = \frac{5}{2} n_\alpha \nabla T_\alpha \qquad (447)$$

Flux de chaleur perpendiculaire

Multipliée vectoriellement par $\underline{B}$ elle conduit au flux de chaleur perpendiculaire

$$\underline{q}_{\alpha\perp} = \frac{5}{2} \frac{n_\alpha T_\alpha}{e_\alpha B^2} \underline{B} \times \nabla T_\alpha + \frac{T_\alpha}{e_\alpha B^2} \sum_{\beta} \underline{G}_{\alpha\beta} \times \underline{B} \qquad (448)$$

7.5 Interprétation physique

Sans résoudre l'équation de Fokker-Planck au premier ordre, on peut déjà proposer une interprétation des flux dérivés jusqu'ici.

Flux de particules

Le flux de particules d'abord

$$n_\alpha \underline{u}_{\alpha\perp} = n_\alpha \frac{\underline{E} \times \underline{B}}{B^2} + \frac{B}{e_\alpha B^2} \times \left(\nabla p_\alpha - \sum_{\beta \neq \alpha} \underline{F}_{\alpha\beta 1} \right) \qquad (449)$$

Le premier terme est dû à la dérive des centres de guidage dans le champ électrique. Le deuxième terme traduit le diamagnétisme du plasma qui a son origine dans le mouvement de gyration autour du champ magnétique des particules. Le troisième terme est l'effet des processus de transport mêmes dûs aux collisions.

Courant électrique

Le courant électrique perpendiculaire circulant dans le plasma vaut

$$\underline{j}_\perp = \sum_\alpha e_\alpha n_\alpha \underline{u}_{\alpha\perp} = \sum_\alpha n_\alpha e_\alpha \frac{\underline{E} \times \underline{B}}{B^2} + \frac{\underline{B}}{B^2} \times \nabla \sum_\alpha p_\alpha \qquad (450)$$

Le terme de friction tombe à cause de la conservation de l'impulsion de l'opérateur de collisions. La neutralité du plasma implique

$$\sum_\alpha e_\alpha n_\alpha = 0 \qquad (451)$$

et en définissant $p = \sum_\alpha p_\alpha$ il vient

$$\underline{j}_\perp = \frac{\underline{B} \times \nabla p}{B^2} \qquad (452)$$

En sommant sur toutes les espèces et en appliquant la conservation de l'impulsion et la neutralité du plasma

$$\nabla_{||} p = 0 \tag{453}$$

qui combiné avec l'expression du courant perpendiculaire exprime la balance des pressions à l'équilibre MHD

$$\underline{j} \times \underline{B} = \nabla p \tag{454}$$

7.6 Cas du champ magnétique fort

Paramètre de développement

Dans la limite du champ magnétique fort sont considérés des plasmas dont le champ magnétique est suffisamment grand pour que la fréquence cyclotronique de toutes les espèces soit plus beaucoup grande que la fréquence de collisions coulombiennes.

$$\frac{\nu_{\alpha\alpha}}{\omega_{c\alpha}} \ll 1 \tag{455}$$

Le corolaire est que le rayon de Larmor est beaucoup plus petit que le libre parcours moyen entre deux collisions coulombiennes.

$$\frac{\rho_{c\alpha}}{\lambda_\alpha} \ll 1 \tag{456}$$

Séparation de la fonction de distribution

Dans ces circonstances il est avantageux d'utiliser les coordonnées cylindriques définies par

$$\underline{v} = v_\perp(\hat{e}_1 \cos\xi + \hat{e}_2 \sin\xi) + v_{||}\hat{e}_3 \tag{457}$$

où $\hat{e}_3$ est parallèle à $\underline{B}$ et ξ symbolise la gyrophase. La fonction de distribution peut alors se séparer en deux termes

$$f_{\alpha 1} = \overline{f_{\alpha 1}} + \tilde{f}_{\alpha 1} \tag{458}$$

où $\overline{f_{\alpha 1}}$ est la moyenne sur une gyration cyclotronique

$$\overline{f_{\alpha 1}} = \oint \frac{d\xi}{2\pi} f_{\alpha 1} \tag{459}$$

Celle-ci représente en quelque sorte la fonction de distribution des centres de guidage.

Equation de Fokker-Planck pour les centres de guidage

L'équation régissant la dynamique de cette fonction de distribution est obtenue en moyennant l'équation de Fokker-Planck au premier ordre sur la gyrophase:

$$\sum_\beta (C_{\alpha\beta}(\overline{f_{\alpha 1}}, f_{\beta 0}) + C_{\alpha\beta}(f_{\alpha 0}, \overline{f_{\beta 1}})) \tag{460}$$
$$= \left(\frac{\nabla p_\alpha}{p_\alpha} - \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \underline{E}_{||} + \left(b_\alpha^2 v_\alpha^2 - \frac{5}{2}\right) \frac{\nabla_{||} T_\alpha}{T_\alpha}\right) v_{\alpha||} f_{\alpha 0}$$

La démonstration de la relation

$$\oint \frac{d\xi_\alpha}{2\pi} C_{\alpha\beta}(f_{\alpha 1}, f_{\beta 0}) = C_{\alpha\beta}\left(\oint \frac{d\xi_\alpha}{2\pi} f_{\alpha 1}, f_{\beta 0}\right) \tag{461}$$

m'échappe encore. Cette équation régit le transport parallèle aux lignes de champ et sera résolue plus bas.

Equation de Fokker-Planck pour le transport perpendiculaire

Le transport perpendiculaire peut être traîté en la soustrayant de l'équation au premier ordre

$$\sum_\beta (C_{\alpha\beta}(f_{\alpha 1}, f_{\beta 0}) \tag{462}$$
$$- C_{\alpha\beta}(\overline{f_{\alpha 1}}, f_{\beta 0}) + C_{\alpha\beta}(f_{\alpha 0}, f_{\beta 1}) - C_{\alpha\beta}(f_{\alpha 0}, \overline{f_{\beta 1}}))$$
$$- \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \underline{v}_\alpha \times \underline{B} \cdot \frac{\partial (f_{\alpha 1} - \overline{f_{\alpha 1}})}{\partial \underline{v}_\alpha}$$
$$= \left(\frac{\nabla p_\alpha}{p_\alpha} - \frac{e_\alpha}{T_\alpha} \underline{E} + \left(b_\alpha^2 v_\alpha^2 - \frac{5}{2}\right) \frac{\nabla T_\alpha}{T_\alpha}\right) \cdot (\underline{v} - \underline{v}_{||}) f_{\alpha 0}$$

Le terme de collisions se simplifie aisément en remarquant que l'opérateur de collisions est linéaire dans les fonctions de distribution. Le deuxième terme du membre de gauche peut se transformer comme suit

$$-\frac{e_\alpha}{m_\alpha} (\underline{v}_\alpha \times \underline{B}) \cdot \frac{\partial \tilde{f}_{\alpha 1}}{\partial \underline{v}_\alpha} = -\frac{e_\alpha}{m_\alpha} (\underline{v}_{\alpha\perp} \times \underline{B}) \cdot \frac{\partial \tilde{f}_{\alpha 1}}{\partial \underline{v}_\alpha} \tag{463}$$
$$= \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \frac{\partial \underline{v}_\alpha}{\partial \xi} B \cdot \frac{\partial \tilde{f}_{\alpha 1}}{\partial \underline{v}_\alpha} = \omega_{c\alpha} \frac{\partial \tilde{f}_{\alpha 1}}{\partial \xi}$$

Finalement

$$\sum_\beta (C_{\alpha\beta}(\tilde{f}_{\alpha 1}, f_{\beta 0}) + C_{\alpha\beta}(f_{\alpha 0}, \tilde{f}_{\beta 1})) + \omega_{c\alpha} \frac{\partial \tilde{f}_{\alpha 1}}{\partial \xi} \tag{464}$$
$$= \left(\frac{\nabla p_\alpha}{p_\alpha} - \frac{e_\alpha}{T_\alpha} \underline{E} + \left(b_\alpha^2 v_\alpha^2 - \frac{5}{2}\right) \frac{\nabla T_\alpha}{T_\alpha}\right) \cdot \underline{v}_\perp f_{\alpha 0}$$

Développement de la fonction de distribution

L'hypothèse du champ fort permet de développer en $\nu_{\alpha\alpha}/\omega_{c\alpha}$ la fonction de distribution du premier ordre

$$\tilde{f}_{\alpha 1} = \tilde{f}_{\alpha 10} + \tilde{f}_{\alpha 11} + \dots \qquad (465)$$

Solution à l'ordre zéro

A l'ordre zéro de ce paramètre le terme de collisions n'apparaît pas, permettant d'écrire l'équation pour $\tilde{f}_{\alpha 10}$

$$\omega_{c\alpha}\frac{\partial \tilde{f}_{\alpha 10}}{\partial \xi} = \left(\frac{\nabla p_\alpha}{p_\alpha} - \frac{e_\alpha}{T_\alpha}\underline{E} + \left(b_\alpha^2 v_\alpha^2 - \frac{5}{2}\right)\frac{\nabla T_\alpha}{T_\alpha}\right) \cdot \underline{v}_\perp f_{\alpha 0} \qquad (466)$$

En notant comme auparavant que

$$\hat{n} \times \underline{v}_{\alpha\perp} = \frac{\partial \underline{v}_\alpha}{\partial \xi} \qquad (467)$$

on intègre immédiatement cette équation

$$\tilde{f}_{\alpha 10} = \frac{\underline{v}_\alpha \times \hat{n}}{\omega_{c\alpha}}\left(\frac{\nabla p_\alpha}{p_\alpha} - \frac{e_\alpha}{T_\alpha}\underline{E} + \left(b_\alpha^2 v_\alpha^2 - \frac{5}{2}\right)\frac{\nabla T_\alpha}{T_\alpha}\right) f_{\alpha 0} \qquad (468)$$

Solution au premier ordre

Cette solution bien qu'à l'ordre zéro en fréquence de collisions peut être introduite dans le terme de collisions pour en obtenir sa contribution au premier ordre en $\nu_{\alpha\alpha}/\omega_{c\alpha}$. En partant de la friction dynamique pour calculer la force de friction au premier ordre

$$\underline{F}_{\alpha\beta}(\tilde{f}_{\alpha 1}, f_{\beta 0}) = \int d^3 v_\alpha m_\alpha \underline{A}_{\alpha\beta}(f_{\beta 0}) \tilde{f}_{\alpha 1} \qquad (469)$$

et en utilisant sa représentation en potentiel de Rosenbluth

$$\underline{A}_{\alpha\beta}(f_{\beta 0}) = \frac{2c_{\alpha\beta}}{m_\alpha \mu_{\alpha\beta}}\frac{\partial h_\beta}{\partial \underline{v}_\alpha} \qquad (470)$$

qui dans le cas d'une fonction de distribution maxwellienne vaut

$$h_\beta(v_\alpha) = n_\beta \frac{\phi(b_\beta v_\alpha)}{v_\alpha} \qquad (471)$$

dont le gradient est

$$\frac{\partial h_\beta}{\partial \underline{v}_\alpha} = \left(b_\beta \phi'(b_\beta v_\alpha) - \frac{\phi(b_\beta v_\alpha)}{v_\alpha}\right)\frac{\underline{v}_\alpha}{v_\alpha^2} \qquad (472)$$

Le calcul se réduit à l'intégrale

$$\underline{F}_{\alpha\beta}(\tilde{f}_{\alpha 1}, f_{\beta 0}) = \frac{2c_{\alpha\beta}}{\omega_{c\alpha}\mu_{\alpha\beta}} n_\alpha n_\beta \left(\frac{b_\alpha}{\sqrt{\pi}}\right)^3 \tag{473}$$
$$\int d^3 v_\alpha e^{-b_\alpha^2 v_\alpha^2}\left(b_\beta \phi'(b_\beta v_\alpha) - \frac{\phi(b_\beta v_\alpha)}{v_\alpha}\right)\frac{\underline{v}_\alpha}{v_\alpha^2}(\underline{v} \times \hat{n})$$
$$\cdot\left(\frac{\nabla p_\alpha}{p_\alpha} - \frac{e_\alpha}{T_\alpha}\underline{E} + \left(b_\alpha^2 v_\alpha^2 - \frac{5}{2}\right)\frac{\nabla T_\alpha}{T_\alpha}\right)$$

Celle-ci est très similaire à celle qui apparaît lors du calcul du temps de transfert de l'impulsion entre deux distributions maxwelliennes

$$\underline{F}_{\alpha\beta}(f_{\alpha 0}, f_{\beta 0}) = -\frac{2c_{\alpha\beta}}{\mu_{\alpha\beta}} n_\alpha n_\beta \left(\frac{b_\alpha}{\sqrt{\pi}}\right)^3 \tag{474}$$
$$\int d^3 v_\alpha e^{-b_\alpha^2 v_\alpha^2}\left(b_\beta \phi'(b_\beta v_\alpha) - \frac{\phi(b_\beta v_\alpha)}{v_\alpha}\right)\left(\frac{\underline{v}_\alpha \underline{v}_\alpha}{v_\alpha^2} \cdot (\underline{u}_\beta - \underline{u}_\alpha)\right)$$

et peut-être simplifiée et calculée avec les mêmes raisonnements. En particulier dans la forme vectorielle

$$\frac{\underline{v}}{v^2}\underline{v} \times \hat{n} \cdot \underline{k} = \frac{\underline{v}\underline{v}}{v^2} \cdot \hat{n} \times \underline{k} \tag{475}$$

on en retiendra du tenseur que les termes invariants au changement $\hat{e}_1 \leftrightarrow -\hat{e}_1$ et $\hat{e}_2 \leftrightarrow -\hat{e}_2$, c'est à dire sa diagonale dont chaque élément v_1^2/v^2, v_2^2/v^2 et v_3^2/v^2 vaut 1/3 pour une distribution anisotrope. On obtient finalement

$$\underline{F}_{\alpha\beta}(\tilde{f}_{\alpha 1}, f_{\beta 0}) = \frac{\nu_{\alpha\beta}}{\omega_{c\alpha}} n_\alpha T \hat{n} \times \left(-\frac{\nabla p_\alpha}{p_\alpha} + \frac{e_\alpha}{T}\underline{E} + \frac{3}{2}\frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta}\frac{\nabla T}{T}\right) \tag{476}$$

et de mère identique

$$\underline{F}_{\alpha\beta}(f_{\alpha 0}, \tilde{f}_{\beta 1}) = -\frac{\nu_{\alpha\beta}}{\omega_{c\alpha}} n_\beta T \hat{n} \times \left(-\frac{\nabla p_\beta}{p_\beta} + \frac{e_\beta}{T}\underline{E} + \frac{3}{2}\frac{m_\alpha}{m_\alpha + m_\beta}\frac{\nabla T}{T}\right) \tag{477}$$

avec $T_\alpha = T_\beta = T$, en accord avec la solution trouvée pour $f_{\alpha 0}$ et $f_{\beta 0}$. Ainsi la somme des deux termes linéaires de la force de friction s'écrit

$$\underline{F}_{\alpha\beta} = \frac{\nu_{\alpha\beta}}{\omega_{c\alpha}} n_\alpha T\hat{n} \times \left(\frac{e_\alpha}{e_\beta}\frac{\nabla p_\beta}{p_\beta} - \frac{\nabla p_\alpha}{p_\alpha} + \frac{3}{2}\frac{1-\dfrac{e_\alpha m_\alpha}{e_\beta m_\beta}}{m_\alpha + m_\beta}\frac{\nabla T}{T} \right) \tag{478}$$

Flux de particules perpendiculaire

En le substituant dans l'expression du flux de particules perpendiculaire au premier ordre

$$n_\alpha \underline{u}_{\alpha\perp} = -\frac{1}{m_\alpha \omega_{c\alpha}} \hat{n} \times \sum_{\beta \neq \alpha} \underline{F}_{\alpha\beta} \tag{479}$$

$$= \frac{n_\alpha T}{m_\alpha \omega_\alpha^2} \sum_{\beta \neq \alpha} \nu_{\alpha\beta} \left(\frac{e_\alpha}{e_\beta}\frac{\nabla_\perp p_\beta}{p_\beta} - \frac{\nabla_\perp p_\alpha}{p_\alpha} + \frac{3}{2}\frac{1-\dfrac{e_\alpha m_\alpha}{e_\beta m_\beta}}{m_\alpha + m_\beta}\frac{\nabla_\perp T}{T} \right)$$

Flux de chaleur perpendiculaire

La même démarche appliquée au flux de chaleur au premier ordre aboutit à

$$\underline{q}_{\alpha\perp} = -\frac{T}{m_\alpha \omega_{c\alpha}} \hat{n} \times \sum_\beta G_{\alpha\beta} = \frac{n_\alpha T}{m_\alpha \omega_{c\alpha}^2} \sum_\beta \frac{\nu_{\alpha\beta}}{1 + m_\alpha / m_\beta} \tag{480}$$

$$\left(\frac{3}{2}\left(\frac{\nabla_\perp p_\alpha}{n_\alpha} - \frac{e_\alpha}{e_\beta}\frac{\nabla_\perp p_\beta}{n_\beta} \right) \right.$$

$$\left. - \left(\frac{15}{2}\frac{m_\alpha^2}{m_\beta^2} + 4\frac{m_\alpha}{m_\beta} + \frac{13}{4} - \frac{27}{4}\frac{e_\alpha m_\alpha}{e_\beta m_\beta} \right) \frac{\nabla_\perp T}{1 + m_\alpha / m_\beta} \right)$$

Chacun des termes de la somme formant ces deux flux peut être interprété comme le résultat d'une marche aléatoire dont le pas est donne par le rayon de Larmor

$$\rho_\alpha = \frac{v_\alpha}{\omega_{c\alpha}} = \frac{1}{\omega_{c\alpha}}\sqrt{\frac{2T}{m_\alpha}} \tag{481}$$

et le taux de collisions par $\nu_{\alpha\beta}$, conduisant à un coefficient de diffusion

$$D = \frac{1}{2}\rho_\alpha^2 \nu_{\alpha\beta} = \frac{T\nu_{\alpha\beta}}{m_\alpha \omega_{c\alpha}^2} \tag{482}$$

7.7 La limite du petit rapport de masses

Si l'on considère un plasma composé uniquement d'électrons et d'une espèce d'ions, il est possible de simplifier les opéraeurs de collisions pour ne considérer que les termes du premier ordre en m_e/m_i. Une des première conséquence de cette approximation est que l'équipartition entre les deux populations est négligée et donc chacune pourra à l'équilibre avoir une température différente $T_e \neq T_i$.

Les flux de particules perpendiculaires pour les électrons et les ions se dérivent directement de l'approximation à champ magnétique fort

$$n_e \underline{u}_{e\perp} = n_e \frac{\underline{E} \times \underline{B}}{B^2} - \frac{1}{eB}\hat{n} \times \nabla p_e - \frac{\nu_{ei}}{m_e \omega_{ec}^2}\left(\nabla_\perp p - \frac{3}{2} n_e \nabla_\perp T_e\right) \quad (483)$$

où $p = p_e + p_i$ et

$$n_i \underline{u}_{i\perp} = n_i \frac{\underline{E} \times \underline{B}}{B^2} + \frac{1}{ZeB}\hat{n} \times \nabla p_i - \frac{\nu_{ei}}{m_e \omega_{ce}^2 Z}\left(\nabla_\perp p - \frac{3}{2} n_e \nabla_\perp T_e\right) \quad (484)$$

En rafinant la dérivation pour le flux de chaleur avec $T_e \neq T_i$ on obtient

$$\underline{q}_{e\perp} = -\frac{5}{2}\frac{p_e}{eB}\hat{n} \times \nabla T_e + \frac{\nu_{ei} T_e}{m_e \omega_{ce}^2}\left(\frac{3}{2}\nabla_\perp P - \left(\frac{13}{4} + \frac{\sqrt{2}}{Z}\right) n_e \nabla_\perp T_e\right) \quad (485)$$

et

$$\underline{q}_{i\perp} = -\frac{5}{2}\frac{p_i}{ZeB}\hat{n} \times \nabla T_i + \frac{2\nu_{ii} T_i}{m_i \omega_{ci}^2}\nabla_\perp T_i \quad (486)$$

Pour ce dernier le terme retenu ν_{ii} domine $\frac{m_e}{m_i}\nu_{ei}$.

7.8 Transport parallèle des électrons

Donc l'équation régissant la fonction de distribution des centres de guidage des électrons est

$$C_{ee}(\overline{f_{e1}}, f_{e0}) + C_{ee}(f_{e0}, \overline{f_{e1}}) + C_{ei}(\overline{f_{e1}}, f_{i0}) + C_{ei}(f_{e0}, \overline{f_{i1}}) \quad (487)$$

$$= v_{e||}\left(\frac{\nabla_{||} p_e}{n} + \frac{e}{T}E_{||} + \left(b_e^2 v_e^2 - \frac{5}{2}\right)\frac{\nabla_{||} T_e}{T}\right) f_{e0}$$

Collisions avec les ions

Les termes de collisions avec les ions peuvent être simplifiés en utilisant le fait que $m_e/m_i \ll 1$. Dans chacune de ces opérations le potentiel de Rosenbluth h_i apparaît avec un facteur m_e/m_i et peut-être négligé comparé à g_i. Quand à ce dernier il vaut

$$g_i = \int d^3 v_i f_i |\underline{v}_e - \underline{v}_i| \quad (488)$$

En prenant les échelles de vitesse suivantes où

$$\underline{u}_i = \int d^3 v_i \underline{v}_i f_i \tag{489}$$

$$\left|\underline{v}_e - \underline{u}_i\right| \cong \sqrt{\frac{T_e}{m_e}} >> \left|\underline{v}_i - \underline{u}_i\right| \cong \sqrt{\frac{T_i}{m_i}} \tag{490}$$

on peut approximer

$$\left|\underline{v}_e - \underline{v}_i\right| = \left|\underline{v}_e - \underline{u}_i - (\underline{v}_i - \underline{u}_i)\right| \cong \left|\underline{v}_e - \underline{u}_i\right| \tag{491}$$

et en conséquence

$$g_i \cong \left|\underline{v}_e - \underline{u}_i\right| \int d^3 v_i f_i = n_i \left|\underline{v}_e - \underline{u}_i\right| \tag{492}$$

Unie première étape de simplification consiste donc à écrire avec $\underline{v} = \underline{v}_e - \underline{u}_i$

$$\frac{\partial^2 g_i}{\partial \underline{v}_e \partial \underline{v}_e} = \frac{\partial^2 g_i}{\partial \underline{v} \partial \underline{v}} = n_i \left(\frac{\underline{\underline{1}}}{v} - \frac{\underline{v}\underline{v}}{v^3}\right) \tag{493}$$

et le terme de collisions

$$C_{ei}(f_e, f_i) = \frac{c_{ei} n_i}{m_e^2} \frac{\partial}{\partial \underline{v}} \cdot \left(\left(\frac{\underline{\underline{1}}}{v} - \frac{\underline{v}\underline{v}}{v^3}\right) \cdot \frac{\partial f_e}{\partial \underline{v}}\right) \tag{494}$$

Dans une deuxième étape les fonctions de distribution seront approximées par une maxwellienne perturbée

$$f_e = f_{e0} + f_{e1} \tag{495}$$

$$f_i = f_{i0} + f_{i1} \tag{496}$$

en considérant dans le même esprit que $b_e u_i \ll 1$. Ceci permet de ne retenir dans g_i et dans le tenseur qu'il génère que les termes du premier ordre

$$\frac{\underline{\underline{1}}}{v} - \frac{\underline{v}\underline{v}}{v^3} \cong \frac{1}{v_e^3}\left(\underline{\underline{1}} v_e^2 - \underline{v}_e \underline{v}_e + \underline{u}_i \underline{v}_e + \underline{v}_e \underline{u}_i + \underline{v}_e \cdot \underline{u}_i \left(\underline{\underline{1}} - 3\frac{\underline{v}_e \underline{v}_e}{v_e^2}\right)\right) \tag{497}$$

Ainsi il ne reste dans l'opérateur de collisions que les deux termes linéaires suivant

$$C_{ei}(f_{e1},f_{i1}) = \frac{c_{ei}n_i}{m_e^2}\left(\frac{\partial}{\partial \underline{v}_e}\cdot\left(\left(\frac{\underline{\underline{1}}}{v}-\frac{\underline{v}\underline{v}}{v^3}\right)\cdot\frac{\partial f_{e1}}{\partial \underline{v}_e}\right)\right. \tag{498}$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial \underline{v}_e}\cdot\frac{\underline{u}_i\underline{v}_e+\underline{v}_e\underline{u}_i+\underline{v}_e\cdot\underline{u}_i(1-3\underline{v}_e\underline{v}_e v_e^2)}{v_e^3}\cdot\frac{\partial f_{e0}}{\partial \underline{v}_e}\right)$$

qui sont aisément calculés

$$C_{ei}(f_{e1},f_{i1}) = \frac{c_{ei}n_i}{m_e^2 v_e^3}\left(\frac{\partial}{\partial \underline{v}_e}\cdot(\underline{\underline{1}}v_e^2-\underline{v}_e\underline{v}_e)\cdot\frac{\partial f_{e1}}{\partial \underline{v}_e}+4b_e^2\underline{v}_e\cdot\underline{u}_i f_{e0}\right) \tag{499}$$

Comme la fonction f_{e1} est symétrique autour de la direction du champ magnétique, elle ne dépend que des coordonnées sphériques v_e et $\mu = \underline{v}_e\cdot\hat{n}/v_e$. Ainsi

$$\frac{\partial f_{e1}}{\partial \underline{v}_e} = \left(\frac{\hat{n}}{v_e}-\frac{\underline{v}_e\cdot\hat{n}v_e}{v_e^3}\right)\frac{\partial f_{e1}}{\partial \mu}+\frac{\underline{v}_e}{v_e}\frac{\partial f_{e1}}{\partial v_e} \tag{500}$$

puis

$$(\underline{\underline{1}}v_e^2-\underline{v}_e\underline{v}_e)\cdot\frac{\partial f_{e1}}{\partial \underline{v}_e} = \left(v_e\hat{n}-\frac{\underline{v}_e\cdot\hat{n}}{v_e}\underline{v}_e\right)\frac{\partial f_{e1}}{\partial \mu} \tag{501}$$

et finalement

$$\frac{\partial}{\partial v_e}\cdot(\underline{\underline{1}}v_e^2-\underline{v}_e\underline{v}_e)\cdot\frac{\partial f_{e1}}{\partial \underline{v}_e} = \frac{\partial}{\partial \mu}\left((1-\mu^2)\frac{\partial f_{e1}}{\partial \mu}\right) \tag{502}$$

Il est intéressant de noter que la seule information nécessaire concernant la fonction de distribution des ions est $\underline{u}_i$. Il est donc judicieux de travailler dans le référentiel où cette vitesse est nulle. Il convient donc de remplacer f_{e1} par

$$f_{e1} = 2b_e^2\underline{v}_e\cdot\underline{u}_i f_{e0}+f_{e1}* \tag{503}$$

On peut rapidement calculer que alors

$$C_{ei}(f_{e1},f_{i1}) = \frac{c_{ei}n_i}{m_e^2 v_e^3}\frac{\partial}{\partial \mu}\left((1-\mu^2)\frac{\partial f_{e1}*}{\partial \mu}\right) \tag{504}$$

où le terme $\underline{u}_i$ a judicieusement disparu.

Collisions entre électrons

Quand au terme de collisions entre électrons

$$C_{ee}(f_{e1},f_{e0}) + C_{ee}(f_{e0},f_{e1}) = C_{ee}(2b_e^2\underline{v}_e \cdot \underline{u}_i f_{e0},f_{e0}) \\ + C_{ee}(f_{e0}, 2b_e^2\underline{v}_e \cdot \underline{u}_i f_{e0}) + C_{ee}(f_{e1}^*,f_{e0}) + C_{ee}(f_{e0},f_{e1}^*) \quad (505)$$

son terme

$$C_{ee}(2b_e^2\underline{v}_e \cdot \underline{u}_i f_{e0},f_{e0}) + C_{ee}(f_{e0}, 2b_e^2\underline{v}_e \cdot \underline{u}_i f_{e0}) \quad (506)$$

se développe en

$$4b_e^4\frac{c_{ee}}{m_e^2}\frac{\partial}{\partial\underline{v}_e} \cdot \int d^3\underline{v}'_e\left(\frac{\underline{\underline{1}}}{u} - \frac{\underline{u}\underline{u}}{u^3}\right) \cdot (\underline{v}'_e - \underline{v}_e)(\underline{v}_e\underline{u}_i + \underline{v}'_e \cdot \underline{u}_i)f_{e0}(\underline{v}'_e)f_{e0}(\underline{v}_e) \quad (507)$$

qui est nul si l'on se souvient de la notation $\underline{u} = \underline{v}'_e - \underline{v}_e$ dans ce cas.

Equation de Fokker-Planck pour le transport parallèle des électrons

Ainsi l'équation de Fokker-Planck pour le transport parallèle des électrons se réduit à

$$C_{ee}(f_{e1}^*,f_{e0}) + C_{ee}(f_{e0},f_{e1}^*) + \frac{c_{ei}n_i}{m_e^2v_e^3}\frac{\partial}{\partial\mu}\left((1-\mu^2)\frac{\partial f_{e1}^*}{\partial\mu}\right) \\ = v_{e||}\left(\frac{\nabla_{||}p_e}{p_e} + \frac{e}{T_e}E_{||} + \left(b_e^2v_e^2 - \frac{5}{2}\right)\frac{\nabla_{||}T_e}{T_e}\right)f_{e0} \quad (508)$$

Plasma lorenzien

Dans la limite d'un plasma lorenzien où $Z \to \infty$, l'effet des collisions entre électrons peut être négligé en comparaison des collisions entre électrons et ions. La solution de l'équation de Fokker-Planck est alors analytique

$$f_{e1}^* = -\frac{m_e^2}{c_{ei}n_i}v_e^4\mu\left(\frac{\nabla_{||}p_e}{p_e} + \frac{e}{T_e}E_{||} + \left(b_e^2v_e^2 - \frac{5}{2}\right)\frac{\nabla_{||}T_e}{T_e}\right)f_{e0} \quad (509)$$

Courant électrique parallèle

Le moment $-ev_{e||}$ de cette fonction donne la densité de courant parallèle que l'on peut exprimer en fonction des forces thermodynamiques indépendantes de v_e après avoir calculé les intégrales sur l'espace des vitesses et ainsi dérivé les coefficients de transport

$$j_{e||} = \frac{en_eT_e}{m_e\nu_{ei}}\left(3.39\left(\frac{\nabla_{||}p_e}{p_e} + \frac{e}{T_e}E_{||}\right) + 5.09\frac{\nabla_{||}T_e}{T_e}\right) \quad (510)$$

Flux de chaleur parallèle des électrons

La même procédure appliquée au moment $T_e v_{e||}(b_e^2 v_e^2 - 5/2)$ donne le flux d'énergie parallèle

$$q_{e||} = -\frac{n_e T_e^2}{m_e \nu_{ei}}\left(5.09\left(\frac{\nabla_{||} p_e}{p_e} + \frac{e}{T_e} E_{||}\right) + 21.22 \frac{\nabla_{||} T_e}{T_e}\right) \tag{511}$$

7.9 Plasma composé de plusieurs espèces ioniques

Pour le transport parallèle des électrons la généralisation du plasma simple au plasma composé de plusieurs espèces ioniques est évidente. L'équation de Fokker-Planck devient

$$\sum_a C_{ea}(f_{e1}, f_{a1}) \tag{512}$$

$$= \sum_a \frac{c_{ea} n_a}{m_e^2 v_e^3}\left(\frac{\partial}{\partial \underline{v}_e} \cdot (\underline{\underline{1}} v_e^2 - \underline{v}_e \underline{v}_e) \cdot \frac{\partial f_{e1}}{\partial \underline{v}_e} + 4 b_e^2 \underline{v}_e \cdot \underline{u}_a f_{e0}\right)$$

En définissant un taux de collisions applicable dans un plasma simple

$$\nu_{ei||} \equiv \frac{c_{ei} n_e}{m_e^2 v_e^3} = \frac{2\pi e^4 n_e}{m_e^2 v_e^3} \tag{513}$$

et en utilisant la neutralité du plasma

$$n_e = \sum_a Z_a n_a \tag{514}$$

on peut introduire l'effet du mélange à travers une charge ionique effective

$$\nu_{ea||} \equiv \sum_a \frac{c_{ea} n_a}{m_e^2 v_e^3} = \frac{2\pi e^4}{m_e^2 v_e^3} \sum_a Z_a^2 n_a = \nu_{ei||} \frac{\sum_a Z_a^2 n_a}{\sum_a Z_a n_a} \tag{515}$$

donc

$$\nu_{ea||} = \nu_{ei||} Z_{eff} \tag{516}$$

avec

$$Z_{eff} = \frac{\sum_a Z_a^2 n_a}{\sum_a Z_a n_a} \tag{517}$$

Le référentiel de référence des électrons prend alors la vitesse

$$u_{eff||} \equiv \sum_a \frac{c_{ea} n_a}{m_e^2 v_e^3} u_{a||} = \frac{\sum_\alpha Z_a^2 n_a u_{a||}}{\sum_a Z_a n_a} \tag{518}$$

8. References

[Krall & Trivelpiece] Nicholas A. Krall and Alvin W. Trivelpiece, "Principles of Plasma Physics", Mc Graw-Hill, New-York, 1973

[Miyamoto] Kenro Miyamoto, "Plasma Physics for Nuclear Fusion", MIT Press, Cambridge, 1980

[Hinton 1983] F.L. Hinton in "Handbook of Plasma Physics", edité par M.N. Rosenbluth et R.Z. Sagdeev, 1983

9. Formulaire

Paramètres et constantes physiques

$$\mu_{\alpha\beta} = \frac{m_\alpha m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \tag{519}$$

$$c_{\alpha\beta} = \frac{e_\alpha^2 e_\beta^2 \ln\Lambda}{8\pi\varepsilon_o^2} \tag{520}$$

$$b_\alpha^2 = \frac{m_\alpha}{2T_\alpha} \tag{521}$$

Fonction de Dirac et fonction d'erreur

$$\int \delta(\underline{x})\underline{x}x^{-3} d^3x = 0 \tag{522}$$

$$\phi(y) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-x^2} dx \tag{523}$$

$$\phi(\infty) = 1 \tag{524}$$

$$\int d^3x \frac{e^{-x^2}}{|\underline{x} - \underline{y}|} = \sqrt{\pi}^3 \frac{\phi(y)}{y} \tag{525}$$

Calcul différentiel

$$\frac{\partial}{\partial \underline{x}} \cdot (\underline{a} \times \underline{b}) = \underline{b} \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \times \underline{a} - \left(\underline{a} \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \times \underline{b}\right) \tag{526}$$

$$\frac{\partial}{\partial \underline{x}} \cdot (\underline{a}\underline{b}) = \left(\frac{\partial}{\partial \underline{x}} \cdot \underline{a}\right)\underline{b} + \left(\underline{a} \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{x}}\right)\underline{b} \tag{527}$$

$$\frac{\partial}{\partial \underline{x}} x = \frac{\underline{x}}{x} \tag{528}$$

$$\frac{\partial}{\partial \underline{x}} x^{-1} = -\frac{\underline{x}}{x^3} \tag{529}$$

$$\frac{\partial}{\partial \underline{x}} \cdot \underline{x} = 3 \tag{530}$$

$$\left(\underline{x} \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{x}}\right)\underline{x} = \underline{x} \tag{531}$$

$$\frac{\partial}{\partial \underline{x}} \cdot \frac{\underline{x}}{x^3} = 4\pi\delta(\underline{x}) \qquad (532)$$

$$\frac{\partial}{\partial \underline{x}}\frac{\underline{x}}{x} = \frac{x^2 \underline{\underline{1}} - \underline{x}\underline{x}}{x^3} \qquad (533)$$

$$\frac{\partial}{\partial \underline{x}} \times \underline{x} = 0 \qquad (534)$$